Pranas Survila

# KOMBINATORIKOS IR STATISTIKOS PRADŽIAMOKSLIS

UDK 519.1/.2 (075.3)
Su84

Redagavo Juozas MAČYS

*Lietuvos Respublikos Švietimo ir mokslo ministerijos matematikos mokymo ekspertų komisijos patvirtinta*





ISBN 9986–502–08–X

# Turinys

# Pratarmė

## Jaunajam moksleiviui

Šioje knygelėje rasite jums neįprastų – kombinatorikos ir statistikos uždavinių. Knygelė skirta ne pasiskaitymui, o darbui – uždaviniams spręsti. Geriausia ja naudotis padedant mokytojui. Jis patars, padės įveikti sunkumus. Jei kas iš jūsų norės mokytis spręsti uždavinius savarankiškai, atidžiai persiskaitykite kiekvieno skyrelio pradžioje pateiktus sprendimus ir paaiškinimus. Kitus skyrelio uždavinius spręskite pamėgdžiodami, kol perprasite metodą arba taisyklę.

Tikiuosi, kad uždaviniai pasirodys jums artimi, suprantami, kad įgusite juos spręsti. Jūs perprasite kombinatorikos sudėties ir daugybos taisykles. Išmoksite braižyti galimybių medžius. Galėsite rinkti stebėjimų medžiagą, pateikti ją dažnių lentele, vaizduoti diagramomis. Pajėgsite spręsti apie pasirinkimo įvairiose situacijose galimybių gausumą. Sunkesnių uždavinių (jie pažymėti žvaigždutėmis) galite ir nesiimti. Tačiau klasės „galvos“ turėtų laikyti savo garbės reikalu išspręsti ir juos. 5-tos klasės mokiniams rekomenduojami tik 1–5 skyrelių uždaviniai, 6-tos klasės – 1–7 skyrelių uždaviniai. Visų kitų klasių mokiniams bus įkandami ir kitų skyrelių uždaviniai.

## Mokytojui

Kombinatorika ir statistika nėra tradicinės, įprastos vidurinės mokyklos matematikos temos. Dar tik treji metai, kai jos atsirado 11-toje klasėje. Esu įsitikinęs, jog kombinatorikos ir statistikos pradmenų reikia pradėti mokyti nuo penktos klasės, o gal dar anksčiau. Statistikos pradmenų mokymas neturėtų sudaryti kokių nors problemų. Tai tik stebėjimo duomenų rinkimas, jų užrašymas dažnių lentelėmis, vaizdavimas diagramomis, vidurkio skaičiavimas, įvykio dažnio radimas.

Žymiai sudėtingiau yra mokyti kombinatorikos pradmenų, ir ne tik todėl, kad ši tematika nėra tradicinė. Vyrauja nuomonė, jog tai labai sunki tema. Taip atsitiko dėl to, kad patys matematikos mokytojai arba visai nesimokė kombinatorikos, arba mokėsi jos išdėstytos pernelyg sudėtingai.

Knygelė sudaryta vadovaujantis mintimi, kad kombinatorikos reikia pradėti mokyti nuo paprasčiausių uždavinių (pagal galimybes – aktualių besimokančiam) sprendimo. Spręsdamas realiojo turinio uždavinius, mokinys turi įsisąmoninti, jog kombinatorinė sudėties taisyklė taikoma tada, kai renkamasi vieną daiktą, o pasirinkimo galimybės nusakomos žodeliu *arba*. Po to naudojantis galimybių medžiu arba išrašant visas galimybes reikia perprasti kombinatorinę daugybos taisyklę ir įsisamoninti, jog ja naudojamasi tada, kai renkamasi keli daiktai ir kai pasirinkimo galimybes galima nusakyti žodeliu *ir*. Paprastai sudėties taisyklė nesudaro sunkumų. Todėl 3, 4, 6, 7 skyreliai skirti daugybos taisyklei įsisavinti. Atidus skaitytojas pastebės, kad 6 skyrelio uždaviniai – tai uždaviniai kėlinių skaičiui rasti, o 7 skyrelio – uždaviniai gretinių skaičiui rasti. Aštuntojo skyrelio uždaviniai sunkesni ta prasme, kad čia nebeužtenka vien daugybos taisyklės, o prireikia ir dalybos. Tai jau

derinių skaičiaus radimo uždaviniai. Tačiau niekur tuose skyreliuose nevartojami žodžiai *kėlinys*, *gretinys*, *derinys*, nesinaudojama ir formulėmis. Formulių tiesiog nereikia, jos tik apsunkintų supratimą. 10 skyrelis skiriamas apibendrintajai sudėties taisyklei, o 11 skyrelis – sudėtiniams uždaviniams, kuriems spręsti prireikia tiek sudėties, tiek ir daugybos taisyklių.

Antras dalykas, kurio buvo paisoma rengiant knygelę – tai dėstymo koncentriškumas. 1–5 skyreliai – tai pirmas kombinatorikos ir statistikos pradmenų mokymo koncentras, apimantis sudėties ir daugybos taisykles, stebėjimo duomenų rinkimą, jų pateikimą dažnių lentele ar diagrama ir vidurkio skaičiavimą. 6–8 skyreliai – tai antras koncentras, skirtas daugybos taisyklei įtvirtinti. 9–11 skyreliai – trečias koncentras, skirtas sudėtingesniems kombinatorikos faktams suvokti. Tai įvykio santykinio dažnio sąvoka, imties vidurkio taikymai paprasčiausioms prognozėms (9 skyrelis), apibendrintoji sudėties taisyklė (10 skyrelis), sudėtiniai kombinatorikos uždaviniai (11 skyrelis). Patartina knygele naudotis taip, kad po vieną koncentrą tektų klasei iš eilės trejus metus. Nuo kurios klasės pradėti, kol tai programos nenustatyta, gali nuspręsti pats mokytojas.

Knygelė bus naudinga mokytojui, ypač jeigu jis nesimokė kombinatorikos ir statistikos arba mokėsi tik kvalifikacijos kėlimo kursuose. Ji padės nugalėti kombinatorikos ir statistikos baimę kiekvienam, kuris spręs visus uždavinius ta tvarka, kaip jie siūlomi, eidamas nuo lengvesnio prie sunkesnio, nesiremdamas gatavomis formulėmis, o atvirkščiai – įsisąmonindamas, kad junginių skaičiaus formulės yra kombinatorikos taisyklių tiesioginės išvados.

Autorius

# 1. Užtenka tik sudėti

**1.** Jonukas mėgsta skaityti. Senelis leido jam pasirinkti vieną knygą iš apatinės lentynos. Jonukas suskaičiavo knygas ir įsitikino, kad lentynoje yra 17 knygų, visos skirtingos ir jo dar neskaitytos. Taigi Jonukas vieną knygą gali pasirinkti 17 skirtingų būdų. Sakysime: „Jonukas turi 17 knygos pasirinkimo galimybių“.

**2.** Vyresniam anūkui Simukui senelis leido pasirinkti vieną knygą iš antros arba trečios lentynos. Kiek galimybių pasirinkti turi Simukas, jei antroje lentynoje yra 23 knygos, trečioje 27 knygos, o visos abiejų lentynų knygos skirtingos?

Simukas pagalvojo ir atsakė: „Turiu 50 galimybių“.

Kaip jis svarstė? Tikriausiai šitaip: „Vienoje lentynoje yra 23 knygos, o kitoje – 27 knygos. Iš viso yra $23+27=50$ knygų. Galiu pasirinkti vieną knygą iš 50. Todėl pasirinkimo galimybių skaičius lygus 50“. Ir jis nesuklydo, nes jo pasirinkimo galimybių skaičius lygus: (galimybių pasirinkti 1 knygą iš antros lentynos skaičius) + (galimybių pasirinkti 1 knygą iš trečios lentynos skaičius).

**3.** Mama Onutės gimtadienio vaišėms iškepė 18 bandelių, 35 sausainius, nupirko 13 mandarinų ir 15 didelių obuolių. Belaukiančiai vaišių Onutei pradėjo tekėti seilės, ir mama jai leido pasirinkti vieną skanėstą. Kiek galimybių pasirinkti ji turi?

*Sprendimas.* Onutės pasirinkimo galimybių skaičius yra lygus visų skanėstų, iš kurių ji gali rinktis, skaičiui. Jų yra

$$18+35+13+15=81.$$

Todėl ji turi 81 pasirinkimo galimybę. Šis skaičius yra lygus: (galimybių pasirinkti 1 bandelę skaičius) + (galimybių pasirinkti 1 sausainį skaičius) + (galimybių pasirinkti 1 mandariną skaičius) + (galimybių pasirinkti 1 obuolį skaičius).

Pamąstę lengvai suprasime šitokią mintį. Galėdami rinktis vieną daiktą iš vienos daiktų krūvos arba iš kitos daiktų krūvos, tas krūvas sujungiame (sudedame) į vieną ir renkamės iš gautos vienos. Rinkimosi galimybių yra tiek, kiek iš viso daiktų yra naujoje „didžiojoje" krūvoje – dviejų krūvų sąjungoje. „Didžiosios" krūvos – sąjungos daiktų skaičius yra lygus „mažųjų" krūvų daiktų skaičių sumai. Todėl ir *galimybių pasirinkti skaičius lygus galimybių pasirinkti iš pirmos krūvos skaičiaus ir galimybių pasirinkti iš antros krūvos skaičiaus sumai.*

*Užduotis.* Suformuluokite tą mintį trims krūvoms.

Ką vadinome krūva? Pirmame ir antrame pavyzdžiuose knygų lentynos – tai knygų krūvos. Trečiame pavyzdyje 18 bandelių – bandelių krūva, 35 sausainiai – sausainių krūva ir pan.

Galėtume sakyti: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – skaičių krūva, $\{a, b, c, d, e\}$ – raidžių krūva. Tačiau vargu ar gražiai skamba: žmonių krūva, namų krūva ir pan. Ne visada patogūs ir žodžiai rinkinys, būrys, grupė, banda (kiaulių banda, galvijų banda), gauja ir kitokie. Matematikoje visi tie žodžiai pakeičiami žodžiu *aibė*. Knygų krūva – knygų aibė, obuolių krūva – obuolių aibė. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – skaičių aibė, $\{a, b, c, d, e\}$ – raidžių aibė, žmonių aibė, namų aibė ir pan. Aibės daiktus įprasta vadinti *elementais*.

Vartojant žodį *aibė*, taisyklę galima suformuluoti taip:

> Jei daiktą (elementą) galima pasirinkti iš vienos aibės *arba* iš kitos aibės ir aibėse nėra bendrų daiktų (elementų), tai pasirinkimo galimybių skaičius lygus aibių daiktų (elementų) skaičių sumai.

*Klausimai.*

1. Kiek yra galimybių pasirinkti, jei daiktas renkamas arba iš vienos aibės, arba iš antros aibės, arba iš trečios aibės?
2. Kiek yra galimybių pasirinkti, jei daiktas renkamas arba iš vienos aibės, arba iš antros, arba iš trečios aibės, arba iš ketvirtos aibės?

Taisyklę taikėme spręsdami antrą ir trečią pavyzdžius. Panagrinėkime dar vieną pavyzdį.

**4.** Mama nusprendė pirkti vienos rūšies vaisių kilogramą. Turguje vienas prekeivis prekiauja 7 rūšių obuoliais, kitas prekeivis – 5 rūšių kriaušėmis, o trečias – 4 rūšių šiltųjų kraštų vaisiais. Kiek galimybių pasirinkti turi mama?

*Sprendimas.* Mama gali pirkti arba vieną kilogramą obuolių, arba vieną kilogramą kriaušių, arba vieną kilogramą vienos rūšies šiltųjų kraštų vaisių. Yra 7 obuolių rūšys, 5 kriaušių rūšys, 4 šiltųjų kraštų vaisių rūšys. Todėl pagal taisyklę galimybių pasirinkti yra $7 + 5 + 4 = 16$.

**5.** Miesto dramos teatre per mėnesį parodomi 9 skirtingi spektakliai, o operos teatre – 5 skirtingos operos. Kiek galimybių yra pasirinkti žmogui, kuris nusprendė kitą mėnesį apsilankyti vieną kartą teatre?

**6.** Mokykla į miesto matematikų olimpiadą gali pasiųsti vieną 8 klasės mokinį. 8a klasėje yra 6 matematikai gabūs mokiniai, 8b klasėje – 7 matematikai gabūs mokiniai. Kiek yra galimybių pasirinkti?

**7.** Mergaitė nori nusipirkti priešpiečiams arba bandelę, arba riestainį, arba pyragaitį. Parduotuvėje prie mokyklos yra 5 rūšių bandelių, 3 rūšių riestainių ir 6 rūšių pyragaičių. Kiek galimybių pasirinkti turi mergaitė?

**8.** Mama Jonukui leido lankyti vieną būrelį arba ratelį. Mokykloje veikia 6 būreliai ir 7 rateliai, o moksleivių rūmuose yra dar 8 būreliai, kurių nėra mokykloje. Kiek galimybių pasirinkti turi Jonukas?

**9.** Knygyne yra 10 pavadinimų pasakų knygų, 13 pavadinimų eilėraščių rinkinių, 9 pavadinimų detektyvų ir 17 pavadinimų romanų. Kiek yra galimybių pasirinkti vieną knygą?

**10.** Mergaitė turi 10 ramunių, 15 rugiagėlių ir 14 neužmirštuolių. Keliais būdais ji gali išrinkti vieną gėlę draugei?

**11.** Keturiuose krepšeliuose sudėti vaisiai: viename yra 25 obuoliai, antrame – 17 kriaušių, trečiame – 12 bananų, o ketvirtame – 9 apelsinai. Kiek yra galimybių išsirinkti vieną vaisių?

**12.** Dėžėje yra 7 raudoni, 23 juodi, 19 mėlynų, 5 balti ir 23 žali kamuoliukai. Kiek yra galimybių pasirinkti vieną kamuoliuką?

**13.** Senelis nutarė padovanoti Jurgiukui dviratį ir leido pačiam jį išsirinkti. Miestelio parduotuvėje yra 15 Minsko, 13 Rygos, 11 Šiaulių gamyklos dviračių. Kitame miestelyje yra 17 Talino ir 20 Maskvos gamyklos dviračių. Kiek galimybių pasirinkti turi Jurgiukas, jei:

a) galima rinktis tik savo miestelyje?

b) galima rinktis abiejuose miesteliuose?

**14.** Aušra, Laima ir Dalia renka nevienodos tematikos atvirukus. Aušra turi 50 atvirukų, Laima – 7 atvirukais mažiau negu Aušra, o Dalia turi 15 atvirukų daugiau negu Aušra ir Laima kartu. Keliais būdais jos gali išrinkti vieną atviruką iš visų?

**15.** Mokyklos bibliotekoje yra 13 skirtingų pavadinimų matematikos knygų, dvigubai daugiau skirtingų pavadinimų istorijos knygų, 8 skirtingų pavadinimų fizikos knygų, o grožinės literatūros skirtingų pavadinimų knygų yra 5 kartus daugiau negu matematikos ir fizikos knygų kartu. Kiek yra galimybių pasirinkti knygą?

## 2. Duomenų rinkimas, užrašymas, vaizdavimas

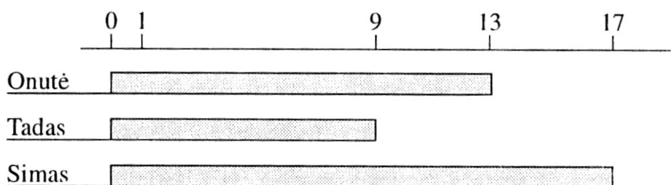
**16.** Šeimoje 3 vaikai: Onutė, Tadas, Simas. Jie susiginčijo, kas dažniau padeda namų ruošoje. Kad juos nuramintų, mama pasakė, jog nuo šiol ji tai registruos. Ji surašė vaikų vardus ir, kai tik vaikas padėdavo mamai, ties jo vardu nubrėždavo brūkšnelį. Kad būtų lengviau skaičiuoti, ji penktuoju brūkšneliu perbraukdavo keturis ankstesnius. Po mėnesio mama turėjo šitokius duomenis:

| Vardas | Kiek kartų padėjo | Iš viso |
|---|---|---|
| Onutė | ~~////~~ ~~////~~ /// | 13 |
| Tadas | ~~////~~ //// | 9 |
| Simas | ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ // | 17 |

Antrasis stulpelis buvo reikalingas tik renkant duomenis. Jį praleidusi, mama gavo šitokią duomenų lentelę:

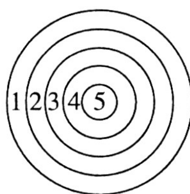
| Vardas | Dažnis |
|---|---|
| Onutė | 13 |
| Tadas | 9 |
| Simas | 17 |

Kad būtų vaizdžiau, mama dar nupiešė šitokį piešinį – diagramą:



Pamačius lentelę ir diagramą, vaikams ginčytis jau nebereikėjo. Iš surinktų duomenų lentelės matyti, kad dažniausiai mamai padėdavo Simas. Jis padėjo mamai 17 kartų – beveik du kartus dažniau negu Tadas. Tai rodo ir diagrama. Vaikai per mėnesį padėjo mamai iš viso $13+9+17=39$ kartus.

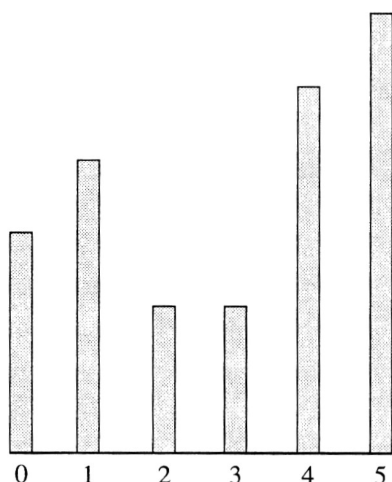
**17.** Šaudymo iš lanko varžybose vaikai šaudo į taikinius. Užskaitoma tiek taškų, kiek parašyta žiede, į kurį pataiko (žr. piešinį). Nepataikius į taikinį, užskaitoma 0 taškų. Tadas savo taškus surašė į lentelę:




| Taškai | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pataikymai | /// | //// | // | // | 卌 | 卌 / |

Po to jis sudarė dažnių lentelę ir pavaizdavo ją diagrama, kurioje stulpelio aukštis yra lygus po stulpeliu parašyto skaičiaus dažniui.

| Taškai | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Dažniai | 3 | 4 | 2 | 2 | 5 | 6 |




**18.** Jonas surašė savo šaudymo rezultatus ir gavo šitokią skaičių eilutę:

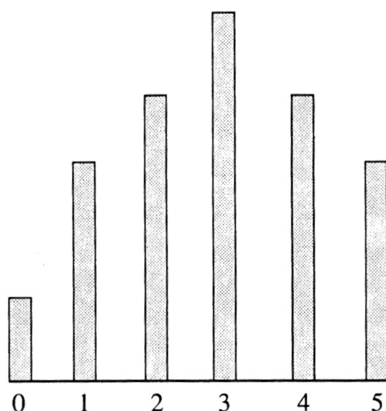
3, 2, 1, 0, 5, 4, 3, 2, 1, 4, 4, 3, 3, 2, 5, 5, 3, 2, 4, 1.

Sudarykite Jono rezultatų registracijos lentelę, dažnių lentelę ir nupieškite jos diagramą.

*Sprendimas.* Pirmoje eilutėje surašome skaičius 0, 1, 2, 3, 4, 5 – tai taškai. Antroje eilutėje rašome brūkšnelius. Jono pirmasis skaičius 3. Jį perbraukiame ir rašome brūkšnelį lentelės antroje eilutėje po skaičiumi 3. Antrasis skaičius 2. Jį perbraukiame ir lentelėje po skaičiumi 2 rašome brūkšnelį. Taip tęsiame, kol išbraukiame visus skaičius. Gauname pavaizduotas lenteles. Po to piešiame diagramą: pažymime skaičius 0, 1, 2, 3, 4, 5 ir ties jais piešiame stulpelius, kurių aukščiai yra lygūs po jais parašytų skaičių dažniams.

| Taškai | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pataikymai | / | /// | //// | ~~////~~ | //// | /// |

| Taškai | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Dažniai | 1 | 3 | 4 | 5 | 4 | 3 |




*Klausimai.*

1. Kiek taškų dažniausiai pelnydavo Tadas?
2. Kiek taškų dažniausiai pelnydavo Jonas?
3. Kiek taškų rečiausiai pelnydavo Tadas?
4. Kiek taškų rečiausiai pelnydavo Jonas?
5. Kiek kartų šovė Tadas ir kiek Jonas?

**19.** Sutvarkykite mokinių pažangumo duomenis, sudarykite dažnių lenteles, nupieškite diagramas.

Pirmas mokinys

a) Lietuvių kalbos pažymiai:

8, 4, 7, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 4, 8, 7, 6, 9, 5, 10, 6, 5, 7.

b) Matematikos pažymiai:

7, 6, 4, 5, 9, 4, 3, 2, 5, 7, 8, 8, 7, 9, 5.

c) Užsienio kalbos pažymiai:

6, 5, 8, 9, 4, 7, 8, 6, 6, 7, 8, 4, 3, 9, 8, 10, 7, 5, 6, 9, 10.

Antras mokinys

a) Lietuvių kalbos pažymiai:

4, 5, 3, 5, 6, 7, 8, 6, 8, 4, 9, 10, 5, 7, 6.

b) Matematikos pažymiai:

8, 7, 5, 6, 9, 4, 4, 4, 6, 7, 9, 9, 8, 10, 6.

c) Užsienio kalbos pažymiai:

8, 7, 6, 4, 5, 8, 7, 3, 4, 5, 8, 9, 7, 7, 6, 6, 7, 8, 8, 7.

**20.** Orą galima apibūdinti taip: saulėta, apsiniaukę, lyja. 10 dienų iš eilės a) 12 valandą, b) 14 valandą, c) 16 valandą stebėkite, koks oras, ir tai pažymėkite stebėjimo duomenų lentelėje. Sudarykite dažnių lenteles. Nupieškite diagramas.

**21.** 20 minučių stebėkite pėsčiųjų perėją. Žymėkitės, kiek moterų, kiek vyrų, kiek vaikų perėjo perėją. Sudarykite dažnių lentelę ir pasakykite, kiek suaugusiųjų ir kiek iš viso pėsčiųjų perėjo perėją per tas 20 minučių.

**22.** Meskite monetą 10 kartų iš eilės ir kiekvieną kartą žymėkitės, kuo atvirto moneta: herbu ar skaičiumi. Užpildykite duomenų rinkimo lentelę. Sudarykite dažnių lentelę. Nupieškite diagramą. Gautas dažnių lenteles ir diagramas palyginkite.

**23.** Pasirinkite šios knygelės teksto vieną eilutę ir atlikite šitokius stebėjimus:

1. Nustatykite, kiek kartų joje pasitaiko raidė $a$, raidė $o$, raidė $u$, raidė $i$, kitos raidės.

2. Nustatykite, kiek kartų joje pasitaiko raidė $m$, raidė $n$, raidė $k$, raidė $l$, raidė $s$, kitos raidės.

Stebėjimo rezultatus užrašykite duomenų rinkimo lentelėse. Sudarykite dažnių lenteles. Nupieškite diagramas.

**24.** Artimiausioje perėjoje 5 dienas tą pačią valandą 3 minutes stebėk, kiek lengvųjų mašinų, kiek sunkvežimių, kiek autobusų pravažiuoja per perėją. Stebėjimo rezultatus užrašyk duomenų rinkimo lentelėje. Sudaryk dažnių lentelę. Nupiešk diagramą.

**25.** Stebėk save visą savaitę pamokose: a) matematikos, b) lietuvių kalbos, c) užsienio kalbos. Kai mokytojas ko nors klausia (nebūtinai tave), duomenų rinkimo lentelėje pažymėk: *moku* (atsakyti į klausimą), *nemoku*. Stebėjimo duomenis surašyk dažnių lentelėmis. Nupiešk diagramas. Atsakyk (sau) į klausimus: „Kokį dalyką moku geriausiai?“, „Kokį dalyką moku blogiausiai?“

Visas tris dažnių lenteles sujunk į vieną. Nupiešk jos diagramą. Palygink įvykių „moku“ ir „nemoku“ dažnius.

**26.** Į duomenų rinkimo lentelę surašyk viso mėnesio visų dalykų savo pažymius. Sudaryk dažnių lentelę. Nupiešk diagramą.

**27.** Valandą stebėkite pravažiuojančių automobilių spalvas ir duomenų rinkimo lentelėje žymėkite: „balta“, „raudona“, „žalia“, „mėlyna“, „juoda“, „pilka“, „kitos“. Gautus duomenis užrašykite dažnių lentele. Nupieškite diagramą su atitinkamomis spalvomis.

**28.** Lošimo kauliuko sienelės pažymėtos taškais nuo 1 iki 6. Metant jį atvirsta tam tikras taškų skaičius. Meskite lošimo kauliuką 30 kartų. Surinkite duomenis. Sudarykite dažnių lenteles. Nupieškite diagramas. Gautas dažnių lenteles ir diagramas palyginkite.

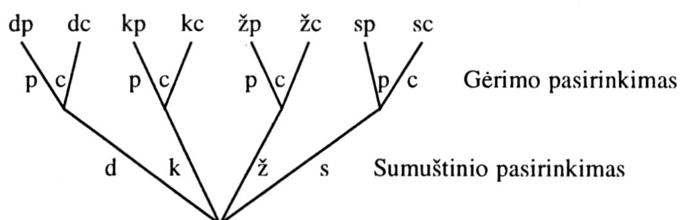
## 3. Galimybių medis, galimybių aibė

**29.** Penktokas Petrukas nori per didžiąją pertrauką užvalgyti ir atsigerti. Mokyklos bufete yra keturių rūšių sumuštinių:

su dešra, su kumpiu, su žuvimi ir su sūriu. Atsigerti yra pepsikolos ir kokakolos. Kiek galimybių pasirinkti turi Petrukas, jei jis nutarė suvalgyti vieną sumuštinį ir išgerti vieną butelį limonado?

*Sprendimas.* Sutrumpintai žymėkime: sumuštinis su dešra – d, sumuštinis su kumpiu – k, sumuštinis su žuvimi – ž, sumuštinis su sūriu – s, pepsikola – p, kokakola – c.

Pavaizduokime pasirinkimo galimybes „medžiu".




Kiekviena pasirinkimo galimybė yra medžio šaka iš dviejų dalių. Tokių šakų skaičius lygus $4 \cdot 2$.

Visas pasirinkimo galimybes galime trumpai išreikšti raidžių dvejetais: „pasirinko sumuštinį su kumpiu ir koka kolą" – (k, c), „pasirinko sumuštinį su sūriu ir pepsikolą" – (s, p). Galimybių visuma gali būti užrašyta šitokia lentele:

{(d, p), (d, c),

(k, p), (k, c),

(ž, p), (ž, c),

(s, p), (s, c)}.

Šios aibės lentelės elementų skaičius – raidžių dvejetų skaičius – lygus $4 \cdot 2$, nes joje yra 4 eilutės ir 2 stulpeliai.

Radome, kad Petruko pasirinkimo galimybių skaičius lygus $4 \cdot 2 = 8$.

Sakykime, kad Petrukas pasirinko sumuštinį su žuvimi ir kokakolą. Parodykite atitinkamą medžio šaką. Pasakykite, kokius pasirinkimus reiškia dvejetai: (k, p), (s, c), (ž, c). Parodykite atitinkamas medžio šakas.

O dabar sakykime, kad Petrukas pirma renkasi limonadą, o po to sumuštinį. Nupieškite galimybių medį. Užrašykite galimybių aibę. Tame medyje parodykite šakas: „pasirinko kokakolą ir sumuštinį su dešra“, „pasirinko pepsikolą ir sumuštinį su sūriu“. Iššifruokite galimybių aibės raidžių dvejetus: (c, d), (c, s), (p, ž), (p, k). Parodykite jas atitinkančias medžio šakas.

**30.** Močiutės bibliotekoje yra pasakų knygos: „Auksinis raktelis“, „Lietuviškos pasakos“, „Užburta karalystė“, „Tūkstantis ir viena naktis“ ir Maironio, Maldonio, S. Nėries eilėraščių rinkiniai. Ji leido Danutei išsirinkti ir pasiimti vieną pasakų knygą ir vieną eilėraščių rinkinį. Nupieškite galimybių medį. Sudarykite galimybių aibę. Raskite galimybių skaičių.

**31.** 60 metrų bėgimo varžybų pusfinalyje dėl 1-os ir 2-os vietų (jas užėmę patenka į finalą) rungiasi Petrukas, Jonukas, Simukas. Nupieškite pusfinalio baigčių galimybių medį. Sudarykite visų galimybių aibę. Kiek yra skirtingų galimybių?

**32.** Onutė turi mėlyną, rudą bei juodą sijonėlius ir baltą, geltoną, oranžinį bei pilką megztinius. Nupieškite Onutės rengimosi galimybių medžius. Sudarykite galimybių aibę. Kiek dienų iš eilės Onutė gali skirtingai rengtis?

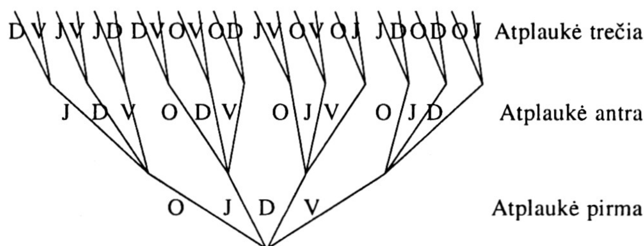
**33.** Žaislų parduotuvėje yra 5 rūšių automodeliukų ir 3 rūšių „konstruktorių“. Mama leido Petrukui išsirinkti vieną automodeliuką ir vieną „konstruktorių“. Kiek pasirinkimo galimybių jis turi?

**34.** Mokykloje yra krepšinio, futbolo, plaukimo sekcijos ir matematikos, užsienio kalbos, istorijos, gamtos mylėtojų, literatų būreliai. Tėvai leido Jonukui lankyti vieną sporto

sekciją ir vieną būrelį. Nupieškite abu galimybių medžius ir sudarykite galimybių aibę. Raskite pasirinkimo galimybių skaičių.

**35.** Plaukimo varžybų finale rungtyniauja Onutė, Julytė, Dalia ir Valė. Raskite 1–3 vietų pasiskirstymo galimybių skaičių.

*Sprendimas.* Kaip ir spręsdami 29 uždavinį, naudosimės sutrumpinimais: Onutė – O, Julytė – J, Dalia – D, Valė – V. Vietų pasiskirstymo galimybes pavaizduokime medžiu.




Medžio kiekviena šaka, turinti tris atkarpas, reiškia konkretų vietų pasiskirstymą. Tokių šakų – vietų pasiskirstymų skaičius lygus $4 \cdot 3 \cdot 2$.

Žiūrėdami į medį, galime išrašyti visų galimybių aibę, išreiškę jas raidžių trejetais:

{OJD, OJV, ODJ, ODV, OVJ, OVD,

JOD, JOV, JDO, JDV, JVO, JVD,

DOJ, DOV, DJO, DJV, DVO, DVJ,

VOJ, VOD, VJO, VJD, VDO, VDJ}.

Raskite medžio šaką, vaizduojančią plaukimo finalo rezultatus: pirma atplaukė Dalia, antra – Valė, trečia – Onutė; pirma atplaukė Julytė, antra – Dalia, trečia – Valė.

Iššifruokite ir parašykite sakiniais raidžių trejetus:

JDO, DVJ, OVJ.

Nesunku suvokti, kad kiekvieną vietų pasiskirstymą atitinka raidžių trejetas. Pirma raidė gali būti paimta iš aibės {O, J, D, V}, turinčios 4 raides. Po to antra raidė gali būti paimta iš aibės, turinčios 3 raides (aibės, gautos iš {O, J, D, V} atmetus jau paimtą raidę). Tada trečioji gali būti paimta iš aibės, turinčios 2 raides (aibės, gautos iš {O, J, D, V} atmetus jau paimtas dvi raides). Tokių trejetų skaičius, kaip matome iš medžio, lygus $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Čia 4 yra pirmosios raidės pasirinkimo galimybių skaičius; 3 – antrosios raidės pasirinkimo galimybių skaičius; 2 – trečiosios raidės pasirinkimo galimybių skaičius.

**36.** Šeimoje auga 4 berniukai: Jonukas, Antanas, Dalius ir Petras. Mama šeštadieniais trims berniukams skiria darbus: vienam išdulkinti takus, kitam dulkių siurbliu išsiurbti kilimus, trečiam išplauti prieškambarį ir tualetą. Nupieškite darbų paskirstymų medį. Suskaičiuokite, kiek šeštadienių mama gali vis kitaip paskirstyti darbus.

**37.** Klasės 4 mokiniams – Onutei, Birutei, Petrukui ir Simukui vienodai gerai sekasi lietuvių kalba, matematika ir istorija. Tą pačią dieną vyksta matematikos, lietuvių kalbos ir istorijos olimpiados. Klasės vadovas nori į kiekvieną olimpiadą pasiųsti po vieną iš tų keturių mokinių. Nupieškite galimybių medį ir raskite, keliais skirtingais būdais galima parinkti mokinių trejetą.

**38.** Videofilmų nuomos punkte yra 3 filmo „Na, palauk!“ serijos – trečia, penkta, šešta, dvi filmo „Mikė Pūkuotukas“ serijos – pirma bei trečia ir filmo „Vaiduoklių gaudytojai“ 5 serijos – pirma, antra, trečia, ketvirta ir penkta. Vytukas nori išsinuomoti po vieną videofilmų „Na, palauk!“, „Mikė Pūkuotukas“, „Vaiduoklių gaudytojai“ seriją.

1. Nupieškite galimybių medį. Raskite galimybių skaičių.
2. Ar galite nupiešti kitokį galimybių medį? Kiek skirtingų medžių galima nupiešti?

**39.** Valius nori lankyti vieną sporto sekciją, vieną būrelį ir mokytis vieno laisvai pasirenkamo dalyko. Mokykloje veikia krepšinio, regbio ir tinklinio sekcijos, darbščiųjų rankų ir fotografijos būreliai. Be to, mokiniai gali laisvai pasirinkti logiką, psichologiją, etiką, gamtosaugą.

1. Kiek skirtingų galimybių medžių galima nupiešti?
2. Nupieškite vieną medį ir raskite Valiaus pasirinkimo galimybių skaičių.

**40.** Meskite monetą 2 kartus.

1. Užrašykite šio bandymo rezultatą.
2. Nupieškite bandymo galimų rezultatų medį. Užrašykite galimybių aibę.
3. Pakartokite (dviejų metimų) bandymą 5 kartus ir kiekvieną kartą užrašykite rezultatą.

**41.** Jonukas meta kamuolį į krepšį 2 kartus. Nupieškite bandymo galimų rezultatų medį. Raskite galimybių skaičių. Užrašykite galimybių aibę.

**42.** Moneta metama 3 kartus. Nupieškite bandymo galimų rezultatų medį. Raskite galimybių skaičių. Užrašykite galimybių aibę.

**43.** Krepšininkas meta kamuolį į krepšį 3 kartus. Nupieškite bandymo galimų rezultatų medį. Raskite galimybių skaičių. Užrašykite galimų rezultatų aibę.

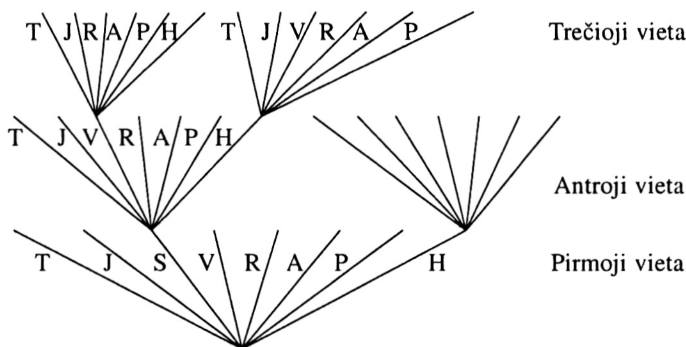
**44.** Moneta metama 4 kartus. Nupieškite bandymo galimų rezultatų medį. Raskite galimybių skaičių.

# 4. Kombinatorinė daugybos taisyklė

Spręsdami praeito skyrelio uždavinius, matėme, kad juo daugiau yra galimybių pasirinkti, juo daugiau šakų turi galimybių medis.

**45.** Koks būtų galimybių medis sprendžiant uždavinį: „Raskite 60 metrų bėgimo finalo 1–3 vietų pasiskirstymų skaičių, kai bėga 8 berniukai – Tadas, Jonas, Simas, Valius, Rokas, Algis, Petras, Henrikas“?

*Sprendimas.* Medžio šakų pirmas vainikas turėtų 8 šakas, kiekviena jo šaka turėtų 7 šakeles. Kiekviena antro vainiko šaka baigtųsi dar 6 šakelėmis. Piešinyje pavaizduota tik dalis to medžio. Viso jo jau nenupieštume sąsiuvinio lape – reikėtų didelio popieriaus lapo.




Tokio medžio šakų skaičius lygus $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. Todėl ir 1–3 vietų pasiskirstymų skaičius 336. Visų galimybių aibės irgi negalėsime užrašyti, nes tai pareikalautų daug laiko ir vietos, be to, nesunku ir apsirikti. Todėl pravartu išmokti rasti galimybių skaičių nepiešiant galimybių medžio.

Taisyklę, kuria rėmėmės spręsdami išnagrinėtus uždavinius ir nepiešėme galimybių medžio, paprasčiausiu atveju galime pasakyti šitaip:

> Galimybių pasirinkti daiktų porą skaičius lygus galimybių pasirinkti pirmą daiktą skaičiaus ir galimybių pasirinkti antrą daiktą skaičiaus sandaugai.

Ši taisyklė vadinama *kombinatorine daugybos taisykle.*

Pasinaudoję 1 skyrelyje aptartais žodžiais *aibė*, *aibės elementas*, *aibės elementų skaičius*, taisyklę galime pasakyti dar ir šitaip.

> Jei pirmą elementą renkamės iš aibės, turinčios $m$ elementų, o (= *ir*) antrą elementą renkamės iš aibės, turinčios $n$ elementų, tai elementų porą galime pasirinkti $m \cdot n$ būdų.

Atkreipkite dėmesį į tai, kad kombinatorinė daugybos taisyklė taikoma tada, kai reikia rasti kombinacijų, pasakomų vartojant žodelį *ir*, skaičių.

Atidžiai parskaitykite 46 ir 47 uždavinių sprendimus, kad panašiai galėtumėte spręsti tolimesnius uždavinius.

**46.** Kiek skirtingų raidžių dvejetų galima sudaryti, jei pirmą raidę galima imti iš aibės $\{a, b, c, d\}$, o antrą raidę – iš aibės $\{x, y, z\}$?

*Sprendimas.* Kadangi pirmą raidę galime pasirinkti 4 skirtingais būdais, o antrą raidę – 3 skirtingais būdais, tai skirtingų raidžių dvejetų skaičius lygus $4 \cdot 3 = 12$.

Pasitikrinkime išrašę tų raidžių dvejetų aibę: $\{(a, x), (b, x), (c, x), (d, x), (a, y), (b, y), (c, y), (d, y), (a, z), (b, z), (c, z), (d, z)\}$. Iš tikrųjų, raidžių dvejetų yra $12 = 4 \cdot 3$.

**47.** Kiek yra dviženklių skaičių, neturinčių vienodų skaitmenų?

*Sprendimas.* Kadangi yra 10 skaitmenų {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, o dviženklio skaičiaus pirmasis skaitmuo nelygus nuliui, tai jį pasirinkti yra 9 galimybės. Antrasis skaitmuo nelygus pirmajam, todėl jį pasirinkti yra 9 galimybės (iš aibės {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} reikia atmesti pirmąjį, jau paimtą skaitmenį).

Iš daugybos taisyklės išplaukia, kad dviženklių skaičių, neturinčių vienodų skaitmenų, yra $9 \cdot 9 = 81$.

*Užduotys*

1. Pasakykite taisyklę apie galimybių pasirinkti daiktų trejetą skaičių:

a) nevartodami žodžio *aibė*;

b) vartodami žodį *aibė*.

2. Pasakykite taisyklę apie galimybių pasirinkti daiktų ketvertą skaičių:

a) nevartodami žodžio *aibė*;

b) vartodami žodį *aibė*.

**48.** Spaudos kioske yra penkių rūšių vokų be pašto ženklų ir keturių rūšių vienodos vertės ženklų. Keliais būdais galima pasirinkti voką ir pašto ženklą?

**49.** Nuo autobusų stotelės prie miško ežerėlio veda 3 takeliai, o nuo ežerėlio prie pilkapio veda 5 keliukai.

1. Keliais skirtingais būdais turistai gali nueiti nuo stotelės prie pilkapio pro ežerėlį?

2. Keliais skirtingais būdais turistai gali nueiti nuo stotelės prie pilkapio pro ežerėlį ir grįžti į stotelę, vėl eidami pro ežerėlį?

3. Keliais skirtingais būdais turistai gali nueiti nuo stotelės prie pilkapio pro ežerėlį ir grįžti, jei jie nenori nė trupučio eiti jau eitu keliu?

**50.** Petras ir Audrius žaidžia šaškėmis dvi partijas. Kiek yra skirtingų tokių varžybų baigčių?

**51.** Jonas ir Simas žaidžia tris šachmatų partijas. Kiek yra skirtingų tokių varžybų baigčių?

**52.** Iš skaitmenų 3, 5, 7 sudaromi dviženkliai skaičiai, neturintys vienodų skaitmenų. Kiek yra tokių skaičių?

**53.** Iš skaitmenų 3, 5, 7 sudaromi dviženkliai skaičiai. Kiek jų yra?

**54.** Iš skaitmenų 1, 3, 5, 7 sudaromi dviženkliai skaičiai. Kiek jų yra?

**55*.**

1. Kiek yra triženklių skaičių, kurie neturi vienodų skaitmenų?
2. Kiek yra keturženklių skaičių, kurie neturi vienodų skaitmenų?
3. Kiek yra penkiaženklių skaičių, kurie neturi vienodų skaitmenų?

**56*.** Žaislų parduotuvėje yra 5 rūšių lėlių ir 4 rūšių meškiukų. Mama leidžia Birutei išsirinkti vieną lėlę ir du skirtingus meškiukus. Kiek pasirinkimo galimybių turi Birutė?

**57.** Tėvai leidžia Danutei pasirinkti vieną būrelį ir vieną sporto sekciją. Kiek galimybių pasirinkti turi Danutė, jei mokykloje veikia 5 būreliai, o sporto mokykloje yra 6 sekcijos?

---

## 5. Vidutinė reikšmė

**58.** Birutės tėvai kas mėnesį už butą moka nevienodai. Metų pabaigoje jie suskaičiavo, kad per metus už butą sumokėta 754 Lt ir 8 ct.

Koks vidutinis vieno mėnesio mokestis už butą?

*Sprendimas.* Iš viso mokesčių sumokėta 754 Lt 8 ct.

Kadangi metuose 12 mėnesių, tai vidutiniškai vienam mėnesiui tenka 12 kartų mažesnis mokestis:

754 Lt 8 ct : 12 = 62 Lt 84 ct

Birutės tėvai už butą mokėjo vidutiniškai 62 Lt 84 ct per mėnesį.

**59.** Poviliuko tėvas dirba taksi vairuotoju. Jis pasižymėjo kiekvieną savaitės dieną nuvažiuotą kelią:

pirmadienis – 320 km,

antradienis – 254 km,

trečiadienis – 286 km,

ketvirtadienis – 344 km,

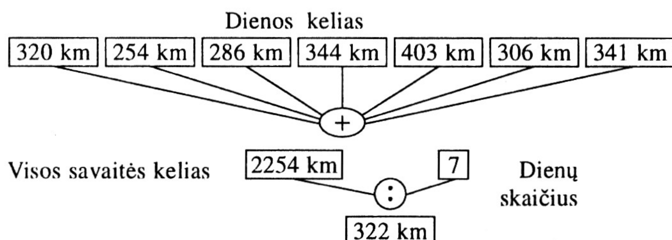
penktadienis – 403 km,

šeštadienis – 306 km,

sekmadienis – 341 km.

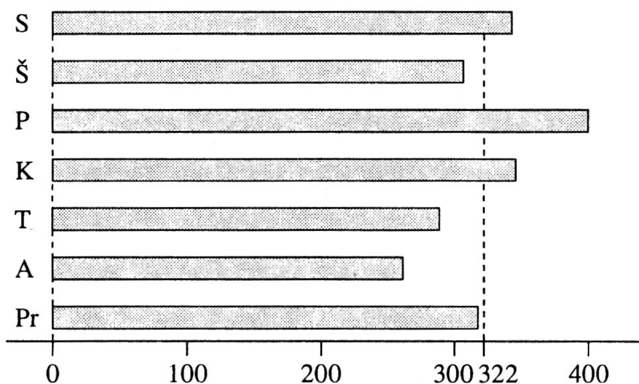
Apskaičiuokite, kiek kilometrų jis nuvažiuodavo vidutiniškai per dieną.

*Sprendimas.*



Poviliuko tėvas per dieną nuvažiuodavo vidutiniškai 322 km.

Pavaizduokime uždavinio duomenis stulpeline diagrama.




Kai žinoma kelių skaičių suma, tų skaičių aritmetinį vidurkį randame sumą padaliję iš jų kiekio.

Keleto skaičių aritmetinį vidurkį randame sudėję tuos skaičius ir gautą sumą padaliję iš tų skaičių kiekio.

**60.** Lifte nurodyta jo keliamoji galia: 890 kg arba 11 asmenų. Koks čia numatytas vidutinis vieno asmens svoris? (Atsakymą suapvalinkite kilogramų tikslumu.)

**61.** Vytas, Simas, Algis ir Benas per fizinio lavinimo pamoką šoko į tolį po 5 kartus. Jų šuoliai:

Vytas – 320 cm, 340 cm, 332 cm, 343 cm, 335 cm,

Simas – 318 cm, 342 cm, 344 cm, 351 cm, 325 cm,

Algis – 392 cm, 415 cm, 403 cm, 344 cm, 406 cm,

Benas – 310 cm, 319 cm, 326 cm, 312 cm, 323 cm.

Apskaičiuokite kiekvieno berniuko šuolių vidurkį.

62. Algio tėtis surašė, kiek kilometrų savo automobiliu nuvažiavo kiekvieną savaitės dieną:

pirmadienis – 38 km,

antradienis – 56 km,

trečiadienis – 87 km,

ketvirtadienis – 42 km,

penktadienis – 31 km,

šeštadienis – 46 km,

sekmadienis – 121 km.

Nubraižykite stulpelinę diagramą. Apskaičiuokite, kiek vidutiniškai tą savaitę buvo nuvažiuojama per dieną.

63. Parduotuvėje buvo parduota „Bočių“ duonos:

pirmadienį – 160 kepalų,

antradienį – 145 kepalai,

trečiadienį – 95 kepalai,

ketvirtadienį – 110 kepalų,

penktadienį – 230 kepalų,

šeštadienį – 185 kepalai,

sekmadienį – 76 kepalai.

Kiek kepalų „Bočių“ duonos buvo parduodama vidutiniškai per dieną? Nubraižykite stulpelinę diagramą.

64. Laikraščių pardavėjas visą savaitę kiekvieną dieną žymėjosi parduotų laikraščių skaičių ir gavo šitokius duomenis:

pirmadienis – 325,

antradienis – 413,

trečiadienis – 386,

ketvirtadienis – 297,

penktadienis – 375,

šeštadienis – 426,

sekmadienis – 284.

Apskaičiuokite, kiek laikraščių jis vidutiniškai parduodavo per dieną.

**65.** Rask savo žingsnio vidutinį ilgį, atlikęs šitokį bandymą. Mokyklos sporto aikštelėje 100 metrų ilgio bėgimo taku nueik ten ir atgal ir suskaičiuok savo žingsnius. Nueito kelio ilgį 200 m = 20 000 cm padalyk iš žingsnių skaičiaus. Rezultatą suapvalink. Tai ir bus tavo žingsnio vidutinis ilgis centimetrais.

**66*.** Klasėje 26 mokiniai. Matematikos mokytojas nustatė, jog spręsdami uždavinį 6 mokiniai sugaišo po 5 minutes, 4 mokiniai – po 7 minutes, 10 mokinių – po 9 minutes ir 6 mokiniai po 10 minučių. Kiek vidutiniškai laiko reikia mokiniui tokio uždavinio sprendimui? Nubraižyk stulpelinę diagramą.

**67*.** 6a klasėje matematikos užduočiai atlikti 3 mokiniams prireikė po 4 minutes, 5 mokiniams – po 5 minutes, 7 mokiniams – po 6 minutes, 6 mokiniams – po 7 minutes, 1 mokiniui prireikė 8 minučių ir 1 – 9 minučių. 6b klasėje tai pačiai užduočiai atlikti 3 mokiniams prireikė po 3 minutes, 7 mokiniams – po 4 minutes, 5 mokiniams – po 5 minutes, 8 mokiniams – po 8 minutes ir 4 mokiniams – po 9 minutes. Kurios klasės mokiniams užduočiai atlikti prireikė vidutiniškai daugiau laiko?

Kiekvienos klasės duomenis pavaizduokite stulpelinėmis diagramomis.

**68.** Išrašykite savo šeimos visų metų (12 mėnesių) mokesčius: a) už elektrą, b) už telefoną, c) už dujas, d) už vandenį. Apskaičiuokite, kiek vidutiniškai per mėnesį buvo mokama: a) už elektrą, b) už telefoną, c) už dujas, d) už vandenį.

**69*.** Atlikdamas mokytojo užduotį, mokinys 5 dienas (nuo pirmadienio iki penktadienio) tarp 8 ir 8 val. 30 min stebėjo, kiek automobilių pravažiuoja gatve per sankryžą. Jis gavo šitokius duomenis.

| Diena | Stebėta laiko | Automobilių skaičius |
|---|---|---|
| Pirmadienis | 22 min | 93 |
| Antradienis | 28 min | 171 |
| Trečiadienis | 18 min | 75 |
| Ketvirtadienis | 12 min | 100 |
| Penktadienis | 20 min | 161 |

Kiek vidutiniškai automobilių per pusę valandos (nuo 8 val. iki 8 val. 30 min) pravažiuoja per šią sankryžą?

**70*.** Melioracijos griovių prižiūrėtojas, prižiūrintis 3 km 650 m ilgio melioracijos griovį, vasarą dalgiu privalo nušienauti pagriovius. Jis surašė pirmųjų dienų duomenis:

| | | |
|---|---|---|
| pirma diena: | iš ryto pjovė 2 val. | nušienavo 60 m |
| | po pietų pjovė 3 val. | nušienavo 75 m |
| antra diena: | iš ryto pjovė 4 val. | nušienavo 97 m |
| | po pietų pjovė 2 val. | nušienavo 43 m |

Apskaičiuokite, kiek dienų prireiktų prižiūrėtojui pagrioviams nušienauti, jei jis kiekvieną dieną dirbtų po 8 valandas.

**71*.** Buvo tiriama, kiek laiko šeštųjų klasių mokiniai praleidžia prie televizoriaus. Apklausus vaikus, buvo gauti šitokie duomenys:

| Trukmė (minutėmis) | 60–90 | 90–120 | 120–150 | 150–180 |
|---|---|---|---|---|
| Skaičius | 5 | 10 | 17 | 23 |

1. Nubraižykite stulpelinę diagramą (laiką imkite lygų trukmės intervalo galų aritmetiniam vidurkiui, pvz., $\frac{60+90}{2} = 75$ min).
2. Raskite, kiek laiko vidutiniškai šeštųjų klasių mokiniai praleidžia prie televizoriaus (atsakymą suapvalinkite 15 min tikslumu).

**72*.** Algio mama duoda jam kiekvieną pirmadienį po 4 Lt 15 ct ledams, ir tos sumos jam turi užtekti visai savaitei perkant kasdien nuo pirmadienio iki penktadienio po vieną porciją. Prie mokyklos esančiame ledų kioske ledai kainuoja:

| | |
|---|---|
| grietininiai | 55 ct |
| plombyras | 1 Lt 60 ct |
| snikeris | 2 Lt 50 ct |
| šokoladiniai | 85 ct |
| pingvinas | 1 Lt 25 ct |

1. Algis jau pirmą savaitę norėjo išbandyti visų rūšių ledus. Kodėl jis to negalėjo padaryti?
2. Kiek centų vidutiniškai tenka ledams pirkti vienai dienai?
3. Algis 3 dienas pirko grietininių ledų ir 2 dienas šokoladinių. Kiek pinigų sutaupė? Kiek vidutiniškai išleido per dieną?
4. Kiek pinigų Algiui reikėtų vidutiniškai vienai dienai, jei jis dvi dienas pirktų pingvinus, o tris dienas – šokoladinius ledus?
5. Kokius ledus Algis galėtų pirkti likusias 3 dienas, jei pirmadienį pirktų plombyrą, o antradienį – grietininius ledus?
6. Ar gali Algis pirmą savaitę nusipirkti po vieną porciją plombyro ir pingvino?

7. Ar gali Algis sutaupyti pirmą savaitę tiek pinigų, kad antrą savaitę galėtų nusipirkti bent vieną kartą snikerio?

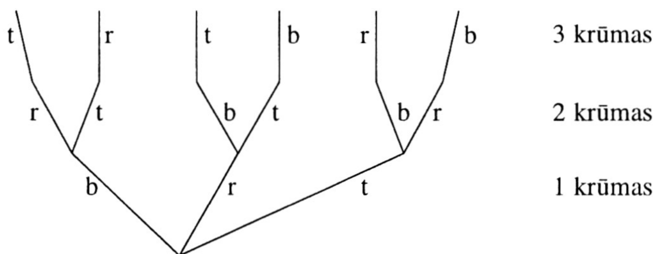
## 6. Kelių daiktų eilė. Eilių skaičius

> Jei pirmąjį daiktą galima pasirinkti $m$ skirtingų būdų, antrąjį daiktą galima pasirinkti $n$ skirtingų būdų, o trečiąjį daiktą galima pasirinkti $k$ skirtingų būdų, tai daiktų trejeto skirtingų pasirinkimų skaičius lygus sandaugai $m \cdot n \cdot k$.

Panaši taisyklė teisinga ir daiktų ketverto, daiktų penketo ir t.t. skirtingų pasirinkimų skaičiui rasti.

**73.** Dalios mama davė jai pasodinti palei taką 3 bijūnų krūmus, iš kurių vieno žiedai balti, kito – rožiniai, trečio – tamsiai raudoni. Kadangi sodinant jie buvo be žiedų, Dalia išdėstė juos atsitiktinai. Keliais skirtingais būdais ji galėjo juos išrikiuoti?

*Sprendimas.* Pažymėkime bijūno žiedo spalvą atitinkama raide: b – balta, r – rožinė, t – tamsiai raudona. Bijūnų išrikiavimų skaičių lengviausia rasti nupiešus galimybių medį.



Galimybių medis turi 6 šakas, kurios reiškia šitokius krūmų išdėstymus:

brt, btr, rbt, rtb, tbr, trb.

Uždavinį galima išspręsti ir taikant daugybos taisyklę: kad išrikiuotume 3 raides (bijūnų krūmus) į eilutę, reikia pasirinkti:

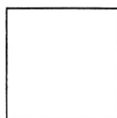
pirmąją raidę – tai galima atlikti 3 būdais,

(*ir*) antrąją raidę – tai galima atlikti 2 būdais,

(*ir*) trečiąją raidę – tai galima atlikti 1 būdu.

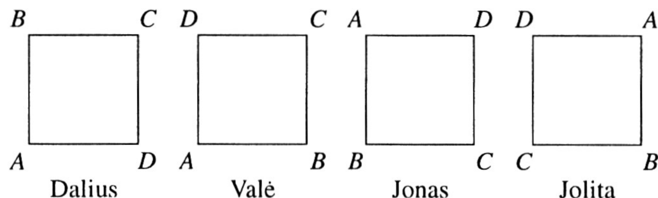
Taikydami daugybos taisyklę, gauname $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

**74.** Mokiniai nupiešė sąsiuvinio lape tokį kvadratą



ir gavo užduotį sužymėti jo viršūnes raidėmis $A$, $B$, $C$, $D$.

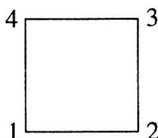
Vaikai sužymėjo viršūnes, kaip kas išmanė:




Klasėje 26 mokiniai. Ar galėjo kiekvienas mokinys sužymėti vis kitaip?

*Sprendimas.* Norint atsakyti į klausimą, reikia rasti, keliais skirtingais būdais galima sužymėti kvadrato viršūnes raidėmis $A$, $B$, $C$, $D$, o tada rastąjį skaičių palyginti su mokinių skaičiumi.

Kvadrato viršūnes sunumeruokime kaip paveikslėlyje.




1-ai viršūnei raidę galime pasirinkti 4 būdais,

(*ir*) 2-ai viršūnei raidę galime pasirinkti 3 būdais,

(*ir*) 3-ai viršūnei raidę galime pasirinkti 2 būdais,

(*ir*) 4-ai viršūnei raidę galime pasirinkti 1 būdu.

Taikydami daugybos taisyklę, gausime: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Nesunku ir išrašyti visus sutvarkytuosius raidžių ketvertus. Siūlome tai atlikti jums patiems. Taip pat siūlome patiems nupiešti galimybių medį.

Kadangi klasėje yra 26 mokiniai, o kvadrato viršūnes sužymėti galima 24 skirtingais būdais, tai bus mokinių, sužymėjusių vienodai.

**75.** Keliais skirtingais būdais galima sužymėti trikampio viršūnes raidėmis $A$, $B$, $C$? Nupieškite galimybių medį. Nurodykite visus galimus žymėjimo būdus.

**76.** Keliais skirtingais būdais galima užrašyti trijų skaičių $k$, $l$, $m$ sumą nesinaudojant skliaustais? Keliais skirtingais būdais galima užrašyti tų pačių skaičių sumą naudojantis vieneriais skliaustais, jeigu suskliausti galima du arba tris dėmenis? Išrašykite visas galimas išraiškas abiem atvejais.

**77.** Keliais skirtingais būdais galima užrašyti trijų skaičių $k$, $l$, $m$ sandaugą nesinaudojant skliaustais? Keliais skirtingais būdais galima užrašyti tą pačią sandaugą naudojantis vieneriais skliaustais? Išrašykite visas galimas išraiškas abiem atvejais.

**78.** Birutė turi 3 pasakų knygas. Keliais skirtingais būdais ji gali sudėti jas į krūvelę (viena ant kitos)?

**79.** Simas rytdienai turi atlikti matematikos, gramatikos, anglų kalbos, geografijos namų užduotis. Keliais skirtingais būdais jis gali pasirinkti jų atlikimo tvarką?

**80.** Agnei mama pavedė išplauti po pietų indus, išdulkinti prieškambario taką, išskalbti broliuko marškinius. Be to, Agnė dar nori nueiti pas draugę pasitarti dėl namų užduoties.

1. Keliais skirtingais būdais ji gali pasirinkti tų darbų tvarką?
2. Kiek bus skirtingų būdų, jei pas draugę ji eis atlikus visus pavedimus?
3. Kiek bus skirtingų būdų, jei ji pirmiausiai plaus indus, o paskiausiai eis pas draugę?

Nupieškite 2 ir 3 užduočių galimybių medžius.

**81.** Užrašykite didžiausią ir mažiausią keturženklį skaičių, turintį skaitmenis 3, 5, 7, 8. Kiek iš viso yra keturženklių skaičių, turinčių skaitmenis 3, 5, 7, 8? Kiek tarp jų yra tokių, kurio antras skaitmuo 7? Išrašykite juos. Kiek bus tokių, kurių paskutinis skaitmuo yra 3? Išrašykite juos.

**82.** Ūkininkas turi 4 vienodo dydžio žemės sklypus. Vieną jų apsėja miežiais, viename augina bulves, viename augina linus ir vieną palieka pūdymui. Keliais skirtingais būdais jis gali suplanuoti pasėlių ir pūdymo paskirstymą? Nupieškite 4 skirtingas paskirstymo schemas.

**83.** Mokyklos šventėje vyks bėgimo, krepšinio, plaukimo ir šokių varžybos. Keliais skirtingais būdais galima sudaryti šventės dienotvarkę, kad jokios dvejos varžybos nevyktų vienu metu?

**84.**

1. Keliais skirtingais būdais galima sudėti vieną porą skliaustų reiškinyje $a + b + c + d$ Išrašykite visus atvejus.

2*. Keliais skirtingais būdais galima užrašyti keturių skaičių $a$, $b$, $c$, $d$ sumą naudojantis viena pora skliaustų?

Užrašykite 9 skirtingas išraiškas.

**85.**

1. Keliais skirtingais būdais galima sudėti vieną porą skliaustų reiškinyje $klmn$? Išrašykite visus atvejus.

2*. Keliais skirtingais būdais galima užrašyti keturių skaičių $k$, $l$, $m$, $n$ sandaugą naudojantis viena pora skliaustų?

Užrašykite 8 skirtingas išraiškas.

**86.** Sudarydamas tvarkaraštį, mokyklos direktoriaus pavaduotojas planuoja 5 klasei pirmadienį skirti tokias pamokas: matematiką, istoriją, lietuvių kalbą, užsienio kalbą, muziką. Keliais skirtingais būdais jis gali išdėstyti tas pamokas? Sudarykite 4 skirtingus pirmadienio tvarkaraščius.

**87.** Keliais skirtingais būdais 5 berniukai gali susėsti and 5 viena greta kitos stovinčių kėdžių?

**88*.** Keliais skirtingais būdais 5 berniukai gali susėsti už apvalaus stalo, aplink kurį sustatytos 5 kėdės. (Susėdimus laikykite skirtingais, jeigu bent vienam berniukui iš dešinės sėdi ne tas pats berniukas.)

**89.** Ant kortelių užrašytos raidės a, b, c, d, e, f.

Keliais skirtingais būdais jas galima išdėlioti į eilę? Užrašykite 9 skirtingus išdėliojimus.

**90.** Krepšelyje 7 vienodi rutuliukai, sužymėti skaitmenimis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Nežiūrėdami traukiame vieną rutuliuką po kito ir dedame vieną šalia kito iš kairės į dešinę. Surašę ta pačia tvarka ištrauktų rutuliukų numerius, gauname 7-ženklį skaičių. Kiek skirtingų skaičių galima gauti šitokiu būdu?

**91.** Matematikos mokytojas davė 5 klasių mokiniams užduotį surašyti visus skaitmenis. Vytas surašė šitaip: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, Jonas – 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, Birutė – 0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9, Valė – 5, 3, 2, 4, 0, 1, 9, 8, 7, 6, Augis – 3, 1, 4, 5, 7, 6, 8, 9, 0, 2.

Mokykloje yra 63 penktųjų klasių mokiniai. Visi jie teisingai atliko užduotį. Ar galėjo kiekvienas surašyti skaitmenis vis kitaip?

## 7. Kiek yra sutvarkytųjų aibės dalių?

**92.** Penki šeštosios klasės mokiniai – Jonukas, Sigutė, Virgutė, Dalius ir Jolanta nori globoti vienišus senelius. Mokytoja žino, jog netoli mokyklos gyvena vieniši seneliai Jonaitis, Deksnienė ir Valaitienė, kuriems reikia padėti. Ji nutarė išrinkti 3 mokinius iš tų 5 ir paskirstyti juos po vieną padėti seneliams. Keliais skirtingais būdais mokytoja gali tai padaryti? (Kiek dienų ji gali vis kitaip paskirstyti vaikus padėti seneliams?)

*Sprendimas.* Galima nupiešti paskirstymų medį, bet jis turėtų daug šakų. Todėl paprasčiau uždavinį spręsti šitaip.

Reikia paskirti vieną vaiką padėti Jonaičiui (tai galima padaryti 5 būdais), dar vieną vaiką padėti Deksnienei (tai galima padaryti 4 būdais), ir dar vieną vaiką padėti Valaitienei (tai galima padaryti 3 būdais).

Taikome daugybos taisyklę ir gauname $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Mokytoja 60 kartų gali vis kitaip paskirti 3 vaikus (iš penkių) padėti seneliams.

**93.** Mokyklos šeštųjų klasių matematikos uždavinių sprendimo varžybose dalyvauja 11 mokinių. Keliais būdais gali pasiskirstyti pirmosios 4 vietos?

*Sprendimas.*

1 vietą gali užimti bet kuris iš 11 dalyvių,

(*ir*) 2 vietą gali užimti bet kuris iš likusių 10 dalyvių,

(*ir*) 3 vietą gali užimti bet kuris iš likusių 9 dalyvių,

(*ir*) 4 vietą gali užimti bet kuris iš likusių 8 dalyvių.

Taikome daugybos taisyklę ir gauname $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7920$.

Pirmos 4 vietos gali pasiskirstyti 7920 būdų.

**94.** Turime 4 raides: A, B, C, D.

1. Raskite, kiek yra tų raidžių sutvarkytųjų dvejetų. Išrašykite juos.
2. Raskite, kiek yra tų raidžių sutvarkytųjų trejetų. Išrašykite juos.

*Sprendimas.*

1. Pirmą dvejeto raidę galima pasirinkti iš visų raidžių – 4 būdai, o antrą raidę galima pasirinkti iš likusių raidžių – 3 būdai.

Taikome daugybos taisyklę ir gauname: $4 \cdot 3 = 12$.

Sutvarkytieji raidžių dvejetai yra tokie:

AB, BA, AC, CA, AD, DA

BC, CA, AD, DA, CD, DA.

2. Pirmą trejeto raidę galima pasirinkti iš visų raidžių – 4 būdai, antrą trejeto raidę iš likusių raidžių – 3 būdai, o trečią trejeto raidę iš likusių raidžių – 2 būdai.

Taikome daugybos taisyklę ir gauname $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Sutvarkytieji raidžių trejetai yra:

ABC, ACB, ABD, ADB, ACD, ADC,

BAC, BCA, BAD, BDA, BCD, BDC,

CAB, CBA, CAD, CDA, CBD, CDB,

DAB, DBA, DAC, DCA, DBC, DCA.

*Pastaba.* Kad rašant nebūtų praleista raidžių kombinacijų, reikia laikytis kokios nors tvarkos. Pavyzdžiui, galima daryti taip.

Pasirenkame pirmą raidę – A. Liko 3 raidės B, C, D. Iš jų sudarome visus galimus (sutvarkytuosius) raidžių dvejetus:

BC, CB, BD, DB, CD, DC. Dabar tuos dvejetus prirašome prie raidės A ir gauname ABC, ACB, ABD, ADB, ACD, ADC. Panašiai gauname ir kitas eilutes.

**95.** Trikampio viršūnes mokytojas leido žymėti raidėmis $A$, $B$, $C$, $D$. Keliais skirtingais būdais galima sužymėti trikampio viršūnes?

**96.** Trikampio viršūnes mokytojas leido žymėti raidėmis $A$, $B$, $C$, $D$, $G$, $K$, $L$. Keliais skirtingais būdais galima sužymėti trikampio viršūnes?

**97.** Keturkampio viršūnes mokytojas leido žymėti raidėmis $A$, $B$, $C$, $D$, $G$, $K$. Keliais skirtingais būdais galima sužymėti keturkampio viršūnes?

**98.** Figūros viršūnėms žymėti galima rinktis raides $A$, $B$, $C$, $D$, $F$, $G$, $H$, $K$, $L$, $M$.

1. Keliais skirtingais būdais galima sužymėti trikampio viršūnes?

2. Keliais skirtingais būdais galima sužymėti keturkampio viršūnes?

3. Keliais skirtingais būdais galima sužymėti penkiakampio viršūnes?

**99.** Aliaus vyresnysis brolis turi 5 pasakų knygas. Jis leidžia Aliui pasirinkti ir perskaityti vieną po kitos 3 knygas, jei Alius teisingai suskaičiuos, kiek pasirinkimo galimybių jis turi. Padėkite Aliui.

**100.** Klasės mokiniai susitikimui su tėvais buvo parengę penkis saviveiklos vaizdelius. Dėl laiko stokos buvo sutarta tėvams parodyti tik tris vaizdelius. Keliais skirtingais būdais galima sudaryti vaizdelių programą?

**101*.** Mokyklos videotekoje yra 7 multifilmai. Kabo skelbimas, kad kiekvienas šeštokas, kuris teisingai suskaičiuos, kiek yra galimybių pasirinkti 3 filmukus, galės gauti norimus 3 filmukus. Apskaičiuokite tokių galimybių skaičių.

**102.** Iš 8 šeštosios klasės berniukų reikia išrinkti 4 berniukus ir sudaryti komandą sporto šventei. Komandą sudaro: bėgikas, šuolininkas į tolį, šuolininkas į aukštį ir gimnastas. Keliais skirtingais būdais gali būti sudaryta komanda?

**103.** Naujametinei šventei mokyklos ansamblis parengė 10 dainų, bet dėl laiko stokos jie galės padainuoti tik šešias dainas. Keliais skirtingais būdais jie gali sudaryti savo pasirodymo programą? (Laikykite, kad programa bus kita net tada, kai sudaryta iš tų pačių 6 dainų, bet skiriasi jų atlikimo tvarka.)

## 8*. Daugybos taisyklės ne visada pakanka

Šio skyrelio uždaviniai sunkesni, nors iš pirmo žvilgsnio skamba panašiai kaip ir praeito skyrelio. Juose nagrinėjami daiktų junginiai yra kitokie negu praeitame skyrelyje. Tuose junginiuose nesvarbu daiktų tvarka, svarbu tik patys daiktai. Panagrinėkime pavyzdžių.

**104.** Valius turi keturis kareivėlius – raitelį, indėną, šaulį ir artileristą.

a) Jis nori du iš jų padovanoti draugui. Keliais skirtingais būdais jis gali tai padaryti?

b) Valius nutarė atiduoti 3 iš 4 kareivėlių jaunesniam broliukui. Keliais skirtingais būdais jis gali pasirinkti atiduodamus kareivėlius?

*Sprendimas.*

a) Išrašome visus kareivėlių dvejetus:

(raitelis, indėnas),

(raitelis, šaulys),

(raitelis, artileristas),

(indėnas, šaulys),

(indėnas, artileristas),

(šaulys, artileristas).

Tvarka čia nesvarbi, nes nesvarbu, kokia tvarka Valius paduos draugui kareivėlius, o svarbu kokius. Šiame uždavinyje dovana (raitelis, šaulys) yra ta pati, kaip ir (šaulys, raitelis), o dovana (indėnas, šaulys) yra ta pati, kaip ir (šaulys, indėnas).

Draugui dovaną Valius gali sudaryti 6 būdais.

b) Atiduodamas broliukui 3 kareivėlius, jis turi nuspręsti, kurį pasilikti sau.

| Pasilieka | Atiduoda |
|---|---|
| artileristą | raitelį, indėną, šaulį |
| šaulį | raitelį, indėną, artileristą |
| indėną | raitelį, šaulį, artileristą |
| raitelį | indėną, šaulį, artileristą |

Valius broliukui dovaną gali parinkti 4 būdais.

Skirtingų būdų skaičių galime rasti ir taip:

Kiekvieną daiktų trejetą galima sutvarkyti $3 \cdot 2 \cdot 1$ skirtingų būdų. Todėl daiktų trejetų yra $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ kartus mažiau negu daiktų sutvarkytųjų trejetų. Iš keturių daiktų paimtų daiktų sutvarkytųjų trejetų yra $4 \cdot 3 \cdot 2$ (žr. 94 uždavinį). Todėl kareivėlių trejetų yra

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4.$$

Iš viso yra 6 kareivėlių dvejetai, todėl Jonukas dovaną draugui gali sudaryti 6 skirtingais būdais.

Tą skaičių galima gauti ir šitaip. Kiekvieną daiktų dvejetą galima sutvarkyti 2 būdais. Todėl (nesutvarkytųjų) daiktų dvejetų yra 2 kartus mažiau negu sutvarkytųjų dvejetų. Iš 4 daiktų paimtų sutvarkytųjų daiktų dvejetų yra $4 \cdot 3$ (žr. 94 uždavinio sprendimą). Todėl kareivėlių dvejetų yra $(4 \cdot 3) : 2 = 6$.

**105.** Daugiakampių viršūnes žymėti galima raidėmis $A$, $B$, $C$, $D$, $F$, $G$, $H$, $K$, $L$.

1. Kiek skirtingų raidžių trejetų galima pasirinkti trikampio viršūnėms pažymėti?

2. Kiek skirtingų raidžių ketvertų galima pasirinkti keturkampio viršūnėms pažymėti?

*Sprendimas.*

1. Skirtingų raidžių sutvarkytųjų trejetų skaičius yra $9 \cdot 8 \cdot 7$ (taikome daugybos taisyklę). Kiekvieną skirtingų raidžių trejetą galima sutvarkyti $3 \cdot 2 \cdot 1$ būdais. Todėl skirtingų raidžių trejetų yra

$$(9 \cdot 8 \cdot 7) : (3 \cdot 2 \cdot 1) = 84.$$

2. Skirtingų raidžių sutvarkytųjų ketvertų skaičius lygus $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ – jį randame taikydami daugybos taisyklę.

Kiekvieną skirtingų raidžių ketvertą galima sutvarkyti $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ skirtingais būdais. Todėl skirtingų raidžių ketvertų yra $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ kartus mažiau, t.y. $(9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6) : (4 \cdot 3 \cdot 2) = 126$.

**106.** Ant kortelių surašytos raidės A, B, C, D, E.

1. Sudarykite skirtingus (nesutvarkytuosius) raidžių rinkinius:

a) po vieną raidę,

b) po dvi raides,

c) po tris raides,

d) po keturias raides.

2. Rinkinių skaičius surašykite į eilutę. Ką pastebite?

**107.** Ant kortelių surašytos raidės A, B, K, L, M, N. Sudarykite raidžių (nesutvarkytuosius) rinkinius:

a) po dvi raides,

b) po keturias raides.

Kiek gavote?

Kai daiktų yra dar daugiau, išrašyti visus rinkinius nesuklystant ir šitaip rasti jų skaičių sunku. Todėl uždavinį prisieina spręsti skaičiuojant.

Sprendžiant šio skyrelio uždavinius pravartu įsiminti, kad

| |
|---|
| nesutvarkytųjų daiktų rinkinių skaičius yra lygus sutvarkytųjų rinkinių skaičiui, padalytam iš rinkinio sutvarkymų skaičiaus. |

**108.** Dalius turi 5 skirtingų spalvų pieštukus. Jis leidžia Vytui išsirinkti 3. Kiek skirtingų pasirinkimo būdų turi Vytas?

**109.** Onutės kambaryje yra 6 lėlės. Ji nori 2 lėles nusinešti pas draugę. Kiek skirtingų pasirinkimo būdų turi Onutė?

**110.** Onutė turi 6 lėles. Ji nutarė padovanoti mažesnei sesutei 3 lėles. Kiek yra skirtingų pasirinkimo būdų?

**111.** Savaitgalį Stepas turi atlikti 5 namų užduotis. Jis nutarė 3 iš jų atlikti šeštadienį. Kiek yra skirtingų pasirinkimo būdų?

**112.** Klasėje 7 gabūs matematikai. Į uždavinių sprendimo varžybas reikia pasiųsti du. Keliais skirtingais būdais tai galima atlikti?

**113.** Parduotuvėje yra 6 rūšių kareivėlių. Kiek skirtingų pasirinkimo būdų turi Jonukas, jei mama jam leidžia išsirinkti:

a) vieną kareivėlį?

b) du skirtingus kareivėlius?

c) tris skirtingus kareivėlius?

d) keturis skirtingus kareivėlius?

e) penkis skirtingus kareivėlius?

Visus gautus skaičius surašykite į eilutę. Kuris iš jų didžiausias? Ką dar pastebite?

**114.** Moksleivių rūmuose veikia dailiojo skaitymo, dramos, šokių, šachmatų, šaškių, plaukimo sekcijos. Petrukui tėvai leidžia lankyti dvi sekcijas. Kiek pasirinkimo galimybių?

## 9. Stebėjimai, bandymai. Įvykio santykinis dažnis

**115.** Mokyklos šventei perkama dėžė oro balionų, kurioje sudėta 20 dėžučių po 50 balionų kiekvienoje. Patikrinus vienos dėžutės balionus, rasti 2 kiauri oro balionai. Kiek (apytiksliai) kiaurų oro balionų yra didžiojoje dėžėje?

*Sprendimas.* Iš viso didžiojoje dėžėje yra $50 \cdot 20 = 1000$ balionų. Nežinia, kiek ten yra blogų. Patikrinus 1 dėžutę (50 balionų), rasti 2 kiauri. Tos dėžutės kiauri balionai sudaro $\frac{2}{50} = \frac{1}{25}$ dalį visų balionų. Todėl tikėtina, jog ir visos didžiosios dėžės kiauri balionai sudarys maždaug tokią pat dalį.

Kiaurų balionų skaičių didžiojoje dėžėje pažymėkime raide $n$. Sulyginę didžiosios dėžės kiaurų balionų dalį su patikrintos dėžutės kiaurų balionų dalimi, gausime $\frac{n}{1000} = \frac{2}{50}$, arba $50n = 2 \cdot 1000$,

$$n = (2 \cdot 1000) : 50 = 40.$$

*Atsakymas.* Dėžėje yra apytiksliai 40 kiaurų balionų.

*Pastaba.* Šis skaičius nėra tikslus. Iš tikrųjų kiaurų balionų didelėje dėžėje gali būti daugiau arba mažiau. Tikslų skaičių galima būtų rasti tik patikrinus visus balionus, bet to pirkdamas nepadarysi.

**116.** Treneris stebi, kaip sportininkas mėto į krepšį varžybų metu ir registruoja rezultatus.

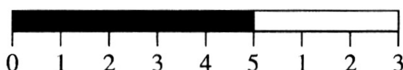
| Pataikė | Nepataikė |
|---|---|
| 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 | 𝍸 𝍸 // |

Sutvarkęs stebėjimo rezultatus, gauna lentelę:

| Įvykis | Pataikė | Nepataikė | Iš viso |
|---|---|---|---|
| Dažnis | 20 | 12 | 32 |
| Santykinis dažnis | $\frac{20}{32}$ | $\frac{12}{32}$ | |

Sakome: pataikymo santykinis dažnis lygus $\frac{20}{32} = \frac{5}{8}$, nepataikymo santykinis dažnis lygus $\frac{12}{32} = \frac{3}{8}$.

Pavaizdavę juodai įvykį „pataikė" ir baltai įvykį „nepataikė", gausime šitokias tiesinę ir skritulinę diagramas.






Sudėję abiejų įvykių santykinius dažnius, gauname

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8}{8} = 1.$$

Sakome taip pat: „sportininkas pataiko 20 kartų iš 32 metimų", arba „pataiko 5 kartus iš 8 metimų".

> Įvykio santykinis dažnis yra lygus įvykio dažniui, padalytam iš stebėjimų (bandymų, matavimų) skaičiaus.

| Įvykių santykinių dažnių suma lygi vienetui. |
|---|

**117.** Klasės berniukai nutarė kartu nusipirkti tušinukų, kad būtų pigiau. Vienas tušinukas kainuoja 50 centų, o dėžutė tušinukų, kurioje yra 110 tušinukų, kainuoja 50 litų. Berniukai patikrino atsitiktinai iš dėžutės paimtus 20 tušinukų. 3 iš jų nerašė. Kas naudingiau: pirkti tušinukus po vieną ir tikrinti ar pirkti visą dėžutę ir netikrinti?

**118.** Mokyklos vadovybė organizuos nemokančių plaukti 5–8 klasių vaikų mokymą plaukti. Ji nutarė išsiaiškinti, kiek iš 5–8 klasių 165 mokinių nemoka plaukti. Atsitiktinai pasirinkus ir apklausus 30 mokinių, 6 iš jų nemokėjo plaukti. Kiek apytiksliai 5–8 klasių mokinių nemoka plaukti?

**119.** Krepšininkas treniruotės metu iš 80 metimų į krepšį pataikė 50 kartų. Kiek apytiksliai kartų jis pataikys, jei mes į krepšį: a) 32 kartus? b) 45 kartus? c) 54 kartus?

**120.** To paties matematikos mokytojo 5 klasėse yra 64 mokiniai. 5a klasėje, kurioje yra 22 mokiniai, už kontrolinį darbą buvo parašyta 12 pažymių, ne mažesnių už 8. Kiek apytiksliai visų 5 klasių mokinių gaus to paties kontrolinio darbo pažymį, ne mažesnį už 8?

**121.** Laikraštyje parašyta: iš 100 apklaustųjų 35 palaiko esamą prezidentą. Mieste 10342 saugusiųjų, turinčių teisę balsuoti. Kiek iš jų apytiksliai rinktų tą patį prezidentą, jei rinkimai vyktų apklausos dieną?

**122.** Vyksta rankinio varžybos. Komandų treneriai stebi varžybas ir žymi metimus į vartus.

| | Įvartis | Virpstas | Atmušta | Pagauta | Pro šalį |
|---|---|---|---|---|---|
| Atletas | 𝍸 𝍸 //// | // | 𝍸 //// | 𝍸 /// | 𝍸 𝍸 / |
| Šviesa | 𝍸 𝍸 𝍸 // | /// | 𝍸 // | 𝍸 //// | 𝍸 //// |

Sutvarkykite kiekvienos komandos stebėjimų duomenis, sudarydami dažnių lenteles. Raskite metimų skaičius. Apskaičiuokite nurodytų įvykių santykinius dažnius. Raskite jų sumas.

Kiekvienai komandai apskaičiuokite įvykio „mesta į vartus, bet įvarčio nepasiekta“ santykinį dažnį.

Pavaizduokite duomenis stulpeline diagrama.

**123.** Mikas, Vytas ir Povilas mėto savo lošimo kauliukus ir registruoja rezultatus.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Mikas | // | ~~////~~ / | ~~////~~ | ~~////~~ // | ~~////~~ //// | ~~////~~ / |
| Vytas | ~~////~~ ~~////~~ | ~~////~~ //// | ~~////~~ // | ~~////~~ /// | ~~////~~ ~~////~~ | ~~////~~ /// |
| Povilas | ~~////~~ ~~////~~ / | ~~////~~ ~~////~~ | ~~////~~ ~~////~~ /// | ~~////~~ //// | ~~////~~ ~~////~~ | ~~////~~ ~~////~~ // |

Sutvarkykite kiekvieno berniuko stebėjimo duomenis, sudarydami dažnių lenteles. Raskite metimų skaičius. Apskaičiuokite santykinius dažnius. Raskite jų sumas.

Kurio berniuko lošimo kauliukas (tarsi) tiksliausias? Kurio (tarsi) prasčiausias? (Deja, iš tikrųjų norint daryti pagrįstas išvadas, reikia atlikti bent tūkstantį bandymų. Į šią pastabą reikia atsižvelgti ir toliau.)

Apskaičiuokite kiekvieno berniuko kauliuko taškų vidurkį. Pavaizduokite duomenis stulpelinėmis diagramomis.

Apskaičiuokite kiekvieno berniuko kauliuko mėtymo įvykių: „atvirto lyginis taškų skaičius“, „atvirto ne mažiau kaip 3 taškai“ dažnius.

**124.** Dalius ir Vytas 1 val. stebėjo pro namą pravažiuojančias mašinas ir gavo šitokius duomenis.

Dalius

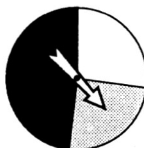
| Sunkvežimis | Autobusas | Lengvasis automobilis |
|---|---|---|
| 卌 卌 卌 /// | 卌 卌 /// | 卌 卌 卌 卌 //// |

Vytas

| Sunkvežimis | Autobusas | Lengvasis automobilis |
|---|---|---|
| 卌 卌 卌 //// | 卌 卌 /// | 卌 卌 卌 卌 卌 // |

Apskaičiuokite abiejų stebėjimų įvykių santykinius dažnius. Nustatykite, pro kurio berniuko namą pravažiuoja santykinai daugiau sunkvežimių, autobusų, lengvųjų automobilių.

**125.** Mokyklos šventės metu vyko loterija, kurios metu buvo sukamas loterijos ratas. Jonukas stebėjo ir rezultatus rašė į lentelę.



| P (pilka) | B (balta ) | J (juoda) |
|---|---|---|
| 卌 卌 卌 //// | 卌 卌 卌 卌 // | 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 // |

Sutvarkykite jo stebėjimų duomenis, sudarydami dažnių lentelę. Raskite sukimų skaičių. Apskaičiuokite įvykių santykinius dažnius. Išrikiuokite įvykius į eilę pagal santykinius dažnius. Raskite santykinių dažnių sumą.

Duomenis pavaizduokite stulpeline diagrama.

**126.** Mokyklos šventėje vyko loterija, kurioje buvo galima laimėti knygą, maišelį saldainių, tušinuką, bilietą į ekskursiją arba ištraukti tuščią bilietą. Vytas žymėjo loterijos rezultatus ir gavo šitokius duomenis.

| Knyga | Saldainiai | Tušinukas | Ekskursija | Tuščias bilietas |
|---|---|---|---|---|
| 卌 卌<br>//// | 卌卌卌<br>卌卌卌 // | 卌卌卌卌<br>卌卌 //// | /// | 卌 卌 卌 卌<br>卌 卌 卌 卌<br>卌 卌 卌 卌 /// |

Sutvarkykite stebėjimo duomenis. Pavaizduokite juos stulpeline diagrama.

Kurio įvykio santykinis dažnis: 1) mažiausias? 2) didžiausias?

## 10*. Apibendrintoji kombinatorinė sudėties taisyklė

**127.** Metamas lošimo kauliukas – kubas, kurio šešiose sienelėse pažymėta nuo vieno iki šešių taškų.

Galimos šio metimo (bandymo) baigtys: atvirto 1 taškas, atvirto 2 taškai, atvirto 3 taškai, atvirto 4 taškai, atvirto 5 taškai, atvirto 6 taškai.

Naudosimės sutrumpinimais:

Atvirto vienas taškas – $\{1\}$; atvirto du taškai – $\{2\}$, ... atvirto šeši taškai – $\{6\}$.

Tada bandymo baigtis atitiks aibė $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pasakymas „metamas lošimo kauliukas" reikš, kad atsitiktinai pasirenkamas vienas skaičius iš aibės $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Įvykis „atvirto mažiau kaip 3 taškai" reikš, kad pasirinkta 1 arba 2. Jį atitinka aibė $\{1, 2\}$.

Įvykis „atvirto didesnis už 3 skaičius“ reikš, kad pasirinkta arba 4, arba 5, arba 6. Jį atitiks aibė $\{4, 5, 6\}$.

| Įvykis | Aibė |
|---|---|
| Atvirto lyginis taškų skaičius | $\{2, 4, 6\}$ |
| Atvirto nelyginis taškų skaičius | $\{1, 3, 5\}$ |
| Atvirto dalus iš 3 skaičius | $\{3, 6\}$ |
| Atvirto mažesnis už 4 skaičius | $\{1, 2, 3\}$ |
| Atvirto didesnis už 4 skaičius | $\{5, 6\}$ |

1. Raskime aibės, kuri atitinka įvykį „atvirto mažesnis už 3 skaičius arba didesnis už 4 skaičius“, elementų skaičių.

Šį įvykį galime pasakyti taip: „Skaičius pasirinktas iš aibės $\{1, 2\}$ arba iš aibės $\{5, 6\}$“. Kadangi aibės neturi bendrų elementų, tai pagal kombinatorinę sudėties taisyklę galimų pasirinkimų yra $2 + 2 = 4$.

Aibė $\{1, 2\} \cup \{5, 6\} = \{1, 2, 5, 6\}$ ir vadinama aibės $\{1, 2\}$ ir aibės $\{5, 6\}$ *sąjunga*.

2. Raskime aibės, kuri atitiks įvykį: „Atvirto lyginis arba didesnis už 3 skaičius“. Šį įvykį galima pasakyti šitaip: „Pasirenkamas skaičius iš aibės $\{2, 4, 6\}$ arba iš aibės $\{4, 5, 6\}$“. Tai reiškia, kad skaičius pasirenkamas iš aibės $\{2, 4, 5, 6\}$. Nors čia renkamės tik vieną skaičių iš vienos aibės ($\{2, 4, 6\}$), arba iš kitos aibės ($\{4, 5, 6\}$), bet pasinaudoti sudėties taisykle jau negalime, nes aibės turi bendrų elementų. Pasirinkimų skaičius $4 \neq 3 + 3$. Bet jis lygus $4 = 3 + 3 - 2$, čia pirmas dėmuo 3 – aibės $\{2, 4, 6\}$ elementų skaičius, antras dėmuo 3 – aibės $\{4, 5, 6\}$ elementų skaičius, 2 – aibių bendrųjų elementų (4 ir 6) skaičius.

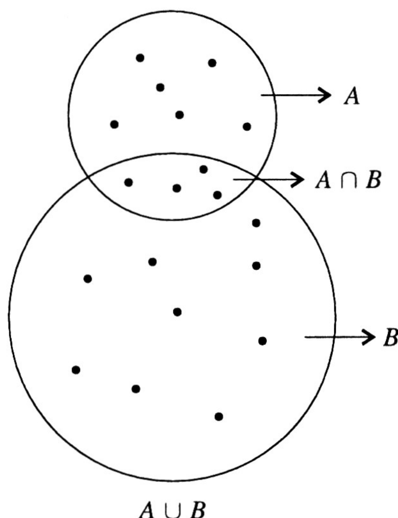
Aibės $\{2, 4, 6\} \cup \{4, 5, 6\}$ elementų skaičius lygus aibės $\{2, 4, 6\}$ elementų skaičius + aibės $\{4, 5, 6\}$ elementų skaičius – aibės $\{4, 6\}$ elementų skaičius.

Aibę $\{4, 6\} = \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\}$ vadinsime aibių $\{2, 4, 6\}$ ir $\{4, 5, 6\}$ *sankirta.*

3. Raskime aibės, atitinkančios įvykį „atvirto nelyginis taškų skaičius arba atvirto daugiau kaip 2 taškai“ elementų skaičių. Šis įvykis reiškia: „pasirenkamas skaičius iš aibės $\{1, 3, 5\}$ arba iš aibės $\{3, 4, 5, 6\}$“. Šį įvykį atitinka aibė $\{1, 3, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ – aibių $\{1, 3, 5\}$ ir $\{3, 4, 5, 6\}$ sąjunga. Jos elementų skaičius yra $5 = 3 + 4 - 2$.

Čia 3 – aibės $\{1, 3, 5\}$ elementų skaičius, 4 – aibės $\{3, 4, 5, 6\}$ elementų skaičius ir 2 – aibės $\{3, 5\} = \{1, 3, 5\} \cap \{3, 4, 5, 6\}$ (aibių $\{1, 3, 5\}$ ir $\{3, 4, 5, 6\}$ sankirtos) elementų skaičius.

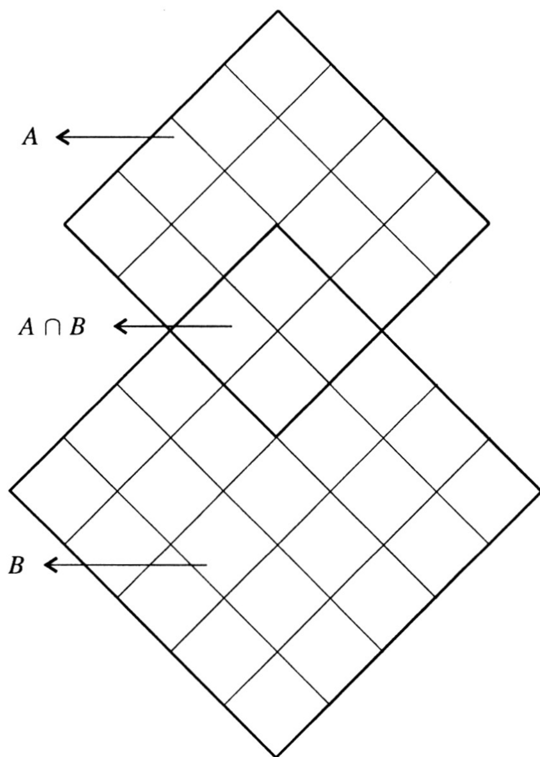
**128.** Sakykime, kad aibę $A$ sudaro mažojo skritulio pažymėti taškai. Jų yra 10. Aibę $B$ sudaro didžiojo skritulio pažymėti taškai. Jų yra 13.




Aibė $A \cup B$ – aibių $A$ ir $B$ sąjunga yra panašios į aštuoniukę figūros, sudarytos iš abiejų skritulių, pažymėti taškai. Jų yra 19. Nors $19 \neq 10 + 13$, bet $19 = 10 + 13 - 4$.

Čia 4 – aibės $A \cap B$ taškų skaičius.

**129.** Raskite nupieštos (sudarytos iš dviejų kvadratų) figūros plotą. Pirmo kvadrato – $A$ – kraštinės ilgis 4 cm, antro kvadrato – $B$ – kraštinės ilgis 5 cm.




*Sprendimas.* Matome, kad visa figūra sudaryta iš 37 kvadratėlių. Taigi figūros $B$ plotas yra 37 (cm$^2$).

Mažojo kvadrato plotas $4 \cdot 4 = 16$ (cm$^2$).

Didžiojo kvadrato plotas $5 \cdot 5 = 25$ (cm$^2$).

Bendrosios dalies plotas 4 (cm$^2$).

Turime: $37 = 16 + 25 - 4$.

Čia 16 – mažojo kvadrato $A$ plotas (jį sudarančių kvadratėlių skaičius),

25 – didžiojo kvadrato $B$ plotas (jį sudarančių kvadratėlių skaičius),

4 – abiejų kvadratų bendros dalies $A \cap B$ plotas (ją sudarančių kvadratėlių skaičius).

> Aibės $A \cup B$ (aibių $A$ ir $B$ sąjungos) elementų skaičius lygus aibės $A$ elementų skaičius plius aibės $B$ elementų skaičius minus aibės $A \cap B$ (aibių $A$ ir $B$ sankirtos) elementų skaičius.

Pažymėkime: aibės $A$ elementų skaičių $m(A)$, aibės $B$ elementų skaičių $m(B)$, aibės $A \cap B$ elementų skaičių $m(A \cap B)$ ir aibės $A \cup B$ elementų skaičių $m(A \cup B)$.

Tada taisyklę galėsime užrašyti šitokia formule:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

**130.** Ant kortelių surašyti skaičiai:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

Atsitiktinai traukiama viena kortelė.

1. Užrašykite aibę, atitinkančią šį bandymą.
2. Užrašykite aibes, atitinkančias įvykius:

a) ištrauktas lyginis skaičius;

b) ištrauktas nelyginis skaičius;

c) ištrauktas didesnis už 4 skaičius;

d) ištrauktas ne didesnis už 5 skaičius;

e) ištrauktas iš 5 dalus skaičius;

f) ištrauktas iš 3 dalus skaičius.

3. Raskite įvykius atitinkančias aibes, tų aibių elementų skaičių ir išreikškite juos pagal taisyklę:

a) ištrauktas ne didesnis už 5 arba dalus iš 3 skaičius;

b) ištrauktas didesnis už 4 arba dalus iš 5 skaičius;

c) ištrauktas nelyginis arba dalus iš 3 skaičius;

d) ištrauktas dalus iš 5 arba nelyginis skaičius;

e) ištrauktas lyginis arba nelyginis skaičius;

f) ištrauktas dalus iš 3 arba didesnis už 4 skaičius.

**131.** Dėžutėje yra 20 vienodo dydžio rutuliukų, sunumeruotų skaičiais nuo 1 iki 20. Atsitiktinai traukiamas vienas rutuliukas.

1. Užrašykite šį bandymą atitinkančią aibę.

2. Parašykite žodžiais įvykius, kuriuos atitinka aibės:

a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$;

b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

c) $C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$;

d) $D = \{4, 8, 12, 16, 20\}$;

e) $H = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.

3. Pasakykite žodžiais įvykius, kuriuos atitinka aibės, raskite tų aibių elementų skaičių pagal taisyklę:

a) $B \cup D$;

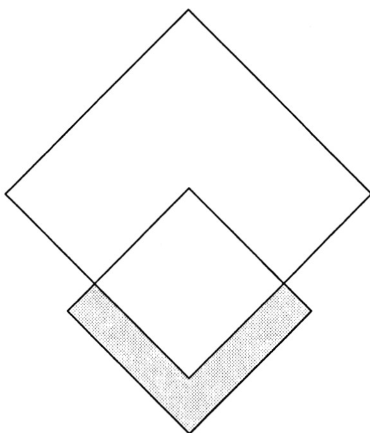
b) $A \cup H$;

c) $C \cup D$;

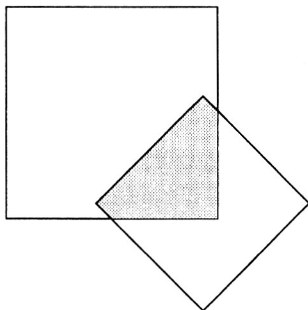
d) $A \cup D$;

e) $B \cup A$.

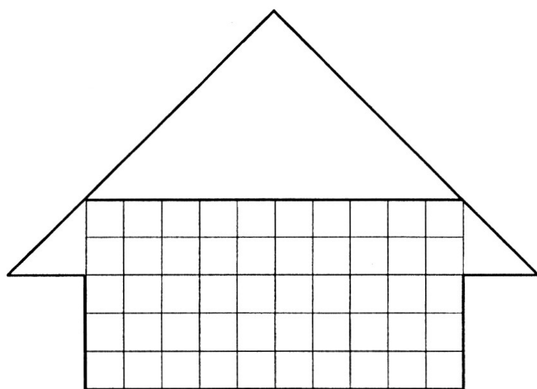
**132.** Apskaičiuokite iš dviejų kvadratų sudarytos figūros plotą. Mažojo kvadrato kraštinės ilgis 4 cm. Didžiojo kvadrato kraštinės ilgis 6 cm. Bendrosios dalies plotas yra 13 cm$^2$.



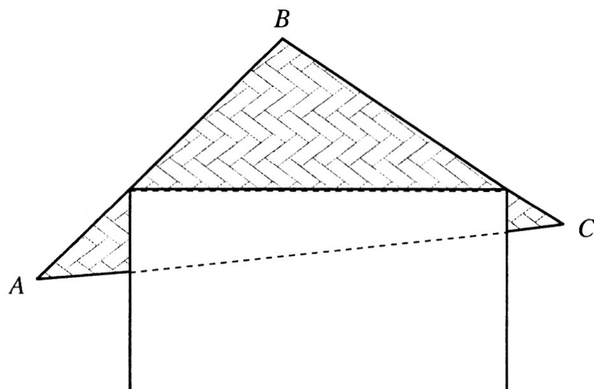
**133.** Raskite kvadratų bendrosios dalies plotą, jei visos figūros plotas yra 64 cm$^2$, o kvadratų kraštinių ilgiai yra 7 cm ir 5 cm.



**134*.** Raskite piešinyje pavaizduotos figūros, suklijuotos iš lygiašonio stačiojo trikampio ir stačiakampio, plotą. Vienos padalos ilgis yra 1 m.



**135.** Piešinyje pavaizduota namo galo forma. Stačiakampis yra mūro siena. Reikia lentomis apkalti 3 dalis – užbrūkšniuotus trikampius. Raskite, kokį plotą reikia apkalti lentomis, jei trikampio $ABC$ kraštinės $AC$ ilgis lygus 12 m, aukštinės į ją ilgis 7 m, o bendros keturkampio ir trikampio dalies plotas yra 10 m$^2$.




**136.** Aibės $A$ elementų skaičius $m(A) = 23$. Aibės $B$ elementų skaičius $m(B) = 34$. Aibių $A$ ir $B$ sąjungos $A \cup B$ elementų skaičius $m(A \cup B) = 48$. Kiek aibės turi bendrų elementų?

**137.** Aibės $A$ elementų skaičius $m(A) = 74$, aibių $A$ ir $B$ sąjungos elementų skaičius $m(A \cup B) = 133$, o jų sankirtos elementų skaičius $m(A \cap B) = 31$. Kiek elementų turi aibė $B$?

**138.** Klasėje yra 23 mokiniai, ir visi jie mokosi užsienio kalbų: 15 mokinių mokosi anglų kalbos, 13 mokinių mokosi vokiečių kalbos. Kiek mokinių mokosi abiejų kalbų?

**139.** Visi šeštųjų klasių berniukai sportuoja: 16 žaidžia futbolą, 18 – krepšinį, 7 – futbolą ir krepšinį. Kiek berniukų šeštosiose klasėse?

**140.** Mokyklos šventės programoje – sportinės varžybos ir meninės saviveiklos pasirodymai. Šventės programoje dalyvavo 63 mokiniai. 45 iš jų dalyvavo tik sporto varžybose, o 15 dalyvavo sporto varžybose ir saviveiklos pasirodymuose. Kiek mokinių dalyvavo saviveiklos pasirodymuose?

**141.** Iš į ekskursiją vykusių mokinių 13 moka susikalbėti lenkiškai, 18 moka susikalbėti vokiškai, 7 mokiniai gali susikalbėti ir lenkiškai, ir vokiškai. Kiekvienas vykęs į ekskursiją mokinys gali susikalbėti bent viena iš tų kalbų. Kiek mokinių vyko į ekskursiją?

**142.** Per labdaros rinkliavą kiekvienas klasės mokinys aukojo arba 10 centų monetą, arba 20 centų monetą, arba abi monetas. Mokytoja pastebėjo, kad po 2 monetas į aukų dėžutę įmetė 8 mokiniai. Dėžutėje rasta 20 monetų po 10 centų ir 15 monetų po 20 centų. Kiek mokinių klasėje?

**143.** Ruošdamiesi mokyklos šventei, visi 23 penktosios klasės mokiniai pirko loterijos bilietų: 13 įsigijo loterijos bilietą po 20 centų, 19 – po 30 centų. Keli mokiniai įsigijo abu skirtingus bilietus? (Kitokių bilietų loterijoje nebuvo, nei vienas mokinys nepirko dviejų vienodų bilietų.)

**144.** Iš 40 šeštųjų klasių mergaičių kiekviena arba lanko namų ruošos būrelį, arba sportuoja, arba lanko namų ruošos būrelį ir sportuoja. 30 mergaičių sportuoja, 25 sportuoja ir lanko namų ruošos būrelį. Kiek šeštokių lanko namų ruošos būrelį?

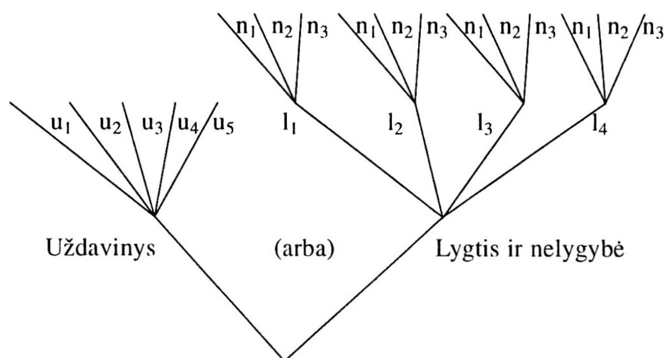
**145*.** Pailgoje dėžutėje, kurios abu galai permatomi, sudėta 50 pieštukų. Dalis jų raudoni, dalis – mėlyni, dalis – dvispalviai (vienas galiukas raudonas, kitas – mėlynas).

1. Dvispalviai pieštukai sudėti vienodai – ta pačia spalva į vieną pusę. Sugalvokite būdą nustatyti, kiek yra raudonų pieštukų, kiek mėlynų, kiek dvispalvių pieštukų.
2. Ar galėsite išspręsti uždavinį, jei dvispalviai pieštukai sudėti kaip papuola?

## 11. Sudėtiniai kombinatorikos uždaviniai

**146.** Tikrindamas žinias, mokytojas leidžia mokiniui pasirinkti: spręsti lygtį ir nelygybę arba spręsti tekstinį uždavinį. Yra 5 lapeliai su tekstiniais uždaviniais, 4 lygtys, 3 nelygybės. Kiek galimybių pasirinkti turi mokinys?

*Sprendimas.* Nupieškime galimybių medį. Uždavinius žymėkime $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$, lygtis – $l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_4$, nelygybes – $n_1$, $n_2$, $n_3$.




Galimybių skaičius yra $17 = 5 + 4 \cdot 3$.

Visų galimybių aibė – $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, (l_1, n_1), (l_1, n_2), (l_1, n_3), (l_2, n_1), (l_2, n_2), (l_2, n_3), (l_3, n_1), (l_3, n_2), (l_3, n_3), (l_4, n_1), (l_4, n_2), (l_4, n_3)\}$.

Galima nupiešti ir kitą galimybių medį. (Nupieškite!)

Nesinaudojant galimybių medžiu, uždavinį galima spręsti skaidant jį dalimis ir naudojantis sudėties ir daugybos taisyklėmis.

Mokinys renkasi tekstinį uždavinį *arba* lygtį ir nelygybę. Galimybių skaičius $k+m$; $k$ – tekstinių uždavinių skaičius, $k = 5$; $m$ – lygties *ir* nelygybės pasirinkimų skaičius.

Lygtį galima pasirinkti 4 būdais, (*ir*) nelygybę – 3 būdais.

Todėl (pagal kombinatorinę daugybos taisyklę) $m = 4 \cdot 3$.

Mokinys turi $5 + 4 \cdot 3 = 17$ galimybių pasirinkti.

Pažiūrėję į galimybių medį, vienoje jo atšakoje matome 5 viršūnes, kitoje – $4 \cdot 3 = 12$ viršūnių.

**147.** Rūta atėjo su mama į parduotuvę. Parduotuvėje yra 5 rūšių pirštinės, 4 rūšių lėlės, 7 rūšių kojinės. Mama leidžia Rūtai pasirinkti du daiktus. Kiek galimybių turi Rūta?

*Sprendimas.* Rūta gali rinktis: *arba* pirštines *ir* lėlę, *arba* pirštines *ir* kojines, *arba* lėlę *ir* kojines. Pagal kombinatorinę sudėties taisyklę gauname $k + l + m$ galimybių.

Čia $k$ – pirštinių *ir* lėlės pasirinkimų skaičius, $l$ – pirštinių *ir* kojinių pasirinkimų skaičius, $m$ – lėlės *ir* kojinių pasirinkimų skaičius.

Šiems skaičiams rasti taikome kombinatorinę daugybos taisyklę.

Pirštines galima pasirinkti 5 būdais, lėlę – 4, todėl $k = 5 \cdot 4$.

Pirštines galima pasirinkti 5 būdais, kojines – 7, todėl $l = 5 \cdot 7$.

Lėlę galima pasirinkti 4 būdais, kojines – 7, todėl $m = 4{\cdot}7$.

$$k+l+m = 5\cdot 4+5\cdot 7+4\cdot 7 = 20+35+28 = 83.$$

Rūta turi 83 pasirinkimo galimybes.

Šio uždavinio galimybių medis sunkiai tilptų į puslapį, nes turi 83 viršūnes.

Išspręsti ir tolimesnieji šio skyrelio uždaviniai skiriasi nuo kitų skyrelių kombinatorikos uždavinių tuo, kad jie susideda iš dviejų arba daugiau paprastųjų uždavinių. Uždavinio dedamąsias dalis (paprastesnius uždavinius) skiria žodelis *arba*. Sprendžiant tokius uždavinius prisieina naudotis kombinatorinėmis sudėties ir daugybos taisyklėmis.

**148.** Knygyne yra 6 pavadinimų vokiškų knygų ir 4 pavadinimų angliškų knygų. Kiek galimybių pasirinkti turi žmogus, jei jis nori pirkti arba vieną knygą, arba dvi skirtingų kalbų knygas? Nupieškite galimybių medį.

**149.** Žaislų parduotuvėje yra 6 rūšių lėlių, 5 rūšių meškiukų, 7 rūšių beždžionėlių. Keliais skirtingais būdais galima nusipirkti 2 skirtingų rūšių žaislus?

**150.** Mokyklos bufete ant prekystalio išdėliota 5 porcijos dešrelių (su skirtingais garnyrais), 6 picos porcijos (su skirtingais garnyrais) ir 8 kepenėlių porcijos (su skirtingais garnyrais). Juras nutarė suvalgyti du skirtingus patiekalus. Kiek yra pasirinkimo galimybių?

**151.** 6a klasėje matematiką labiausiai mėgsta 7 mokiniai, 6b klasėje – 5, 6c klasėje – 4. Mokytojas turi išrinkti 2 skirtingų klasių mokinius dalyvauti matematikos viktorinoje. Kiek jis turi pasirinkimo galimybių?

**152.** Kiek yra mažesnių už 100 skaičių, užrašomų naudojantis tik skaitmenimis 1, 2, 3, 4, 5? Nupieškite galimybių medį.

**153.** Kiek yra mažesnių už 100 skaičių, kuriuos galima užrašyti naudojantis tik skirtingais skaitmenimis iš aibės {1, 2, 3, 4, 5}? Nupieškite galimybių medį.

**154.** Kiek yra mažesnių už 1000 skaičių, užrašomų tik skaitmenimis 2, 4, 6, 8?

**155.** Kiek yra skaičių, užrašomų naudojantis tik skirtingais skaitmenimis iš aibės {2, 4, 6, 8}?

**156.** Kiek yra mažesnių už 1000 skaičių, kurių skaitmenys skirtingi?

**157*.** Kiek yra skaičių, kurių skaitmenys skirtingi ir nelyginiai?

**158*.** Vidas turi 6 skirtingas videokasetes. Jis sako Simui: „Paskolinsiu tau ne daugiau, kaip 3 kasetes, jei teisingai apskaičiuosi, kiek turi skirtingų pasirinkimo būdų". Padėkite Simui.

**159*.** Saulius turi 7 skirtingus pašto ženklus ir nori draugui, kuris renka pašto ženklus, gimimo dienos proga padovanoti ne daugiau kaip 3 pašto ženklus. Keliais skirtingais būdais jis gali tai padaryti?

**160*.** Žaislų parduotuvėje yra 6 rūšių žaislų. Kiek galimybių pasirinkti turi berniukas, jei jam leidžiama išsirinkti ne daugiau kaip 4 skirtingus žaislus?

**161*.** Yra 3 tipų uždaviniai: lengvi, vidutiniai, sunkūs. Lengvų uždavinių – 10, vidutinių – 8, sunkių – 5. Mokiniui leidžiama pasirinkti: arba 2 sunkius, arba 6 lengvus, arba 4 vidutinius, arba 2 lengvus ir 2 vidutinius ir 1 sunkų. Kiek galimybių pasirinkti turi mokinys?

# 12. Atsakymai, sprendimai

Šiame skyrelyje rasite beveik visų uždavinių sprendimus arba bent atsakymus. Kombinatorikos uždavinių atsakymas dažnai pateikiamas taip, kad matytųsi, kokia taisykle (ar taisyklėmis) reikia naudotis sprendžiant uždavinį. Kai keli uždaviniai iš eilės sprendžiami tuo pačiu būdu, tai pirmojo iš jų pateikiamas detalesnis sprendimas, kitų – tik schemos. Tik nedaugelio uždavinių atsakymas pateiktas skaičiumi, o dažniausiai, pasižiūrėjus į atsakymą, galima tik pasitikrinti, ar teisingai samprotaujama, – rezultatą reikės rasti pačiam.

Ieškant galimybių aibės, braižant galimybių medžius, kaip taisyklė, vartojami žodžių sutrumpinimai (nurodoma žodžio pirmoji raidė).

**1 skyrelis.**

**5.** $9+5$. **6.** $6+7$. **7.** $5+3+6$. **8.** $6+7+8$. **9.** $10+13+9+17$. **10.** $10+15+14$. *Pastaba.* Šitame ir kituose skyrelio uždaviniuose laikoma, kad visi daiktai yra skirtingi. Ar daiktus reikia laikyti skirtingais, ar vienodais, dažnai tenka aptarti papildomai. Pavyzdžiui, jūs perkate automobilį, ir yra visiškai vienodi trys vienos markės automobiliai. Vargu ar verta laikyti, kad jūs turite tris pasirinkimo galimybes. Bet jeigu jums leidžiama juos visus tris išbandyti – tada visai kita kalba. **11.** $25+17+12+9$. **12.** $7+23+19+5+23$. **13.** a) $15+13+11$. b) 76. **14.** 201. **15.** 152.

## 2 skyrelis.

**19.** Pirmas mokinys.

Duomenų registravimo lentelė

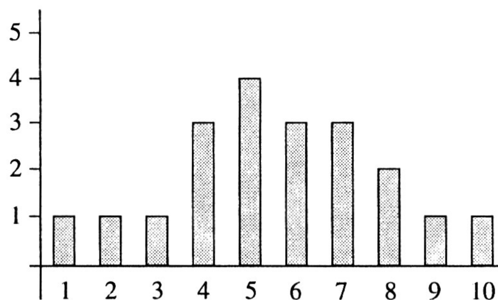
| Pažymys | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Lietuvių k. | / | / | / | /// | //// | /// | /// | // | / | / |
| Matematika | | / | / | // | /// | / | /// | // | // | |
| Užsienio k. | | | / | // | // | //// | /// | //// | /// | // |

Dažnių lentelė

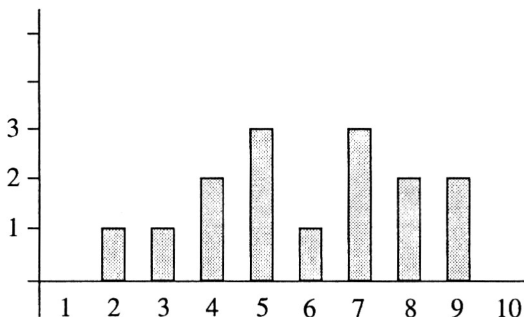
| Pažymys | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Lietuvių k. | 1 | 1 | 1 | 3 | 4 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| Matematika | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 0 |
| Užsienio k. | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 4 | 3 | 4 | 3 | 2 |

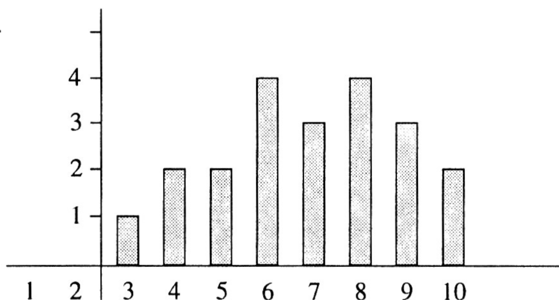
Diagramos

Lietuvių k.




Matematika






Antras mokinys.

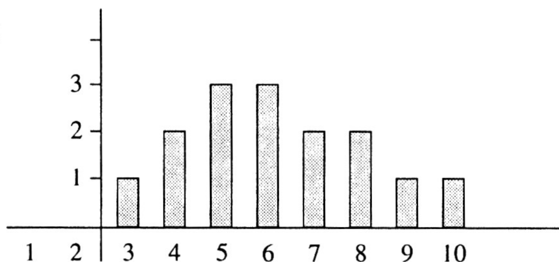
Duomenų registravimo lentelė

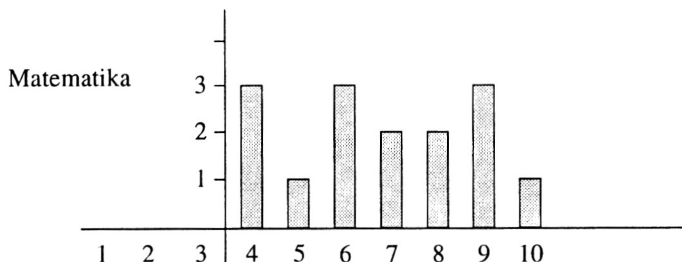
| Pažymys | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Lietuvių k. | | | / | // | /// | /// | // | // | / | / |
| Matematika | | | | /// | / | /// | // | // | /// | / |
| Užsienio k. | | | / | // | // | /// | ~~////~~ / | ~~////~~ | / | |

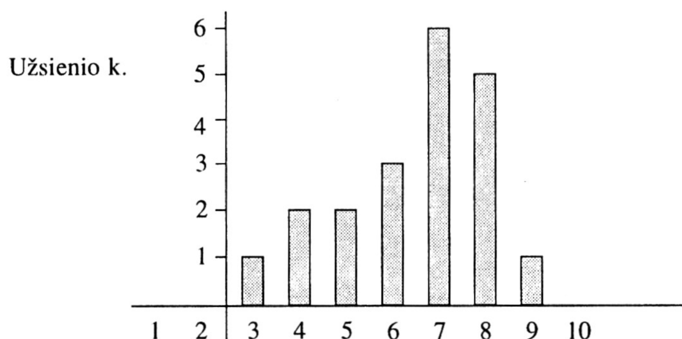
Dažnių lentelė

| Pažymys | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Lietuvių k. | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| Matematika | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 |
| Užsienio k. | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 6 | 5 | 1 | 0 |

Diagramos

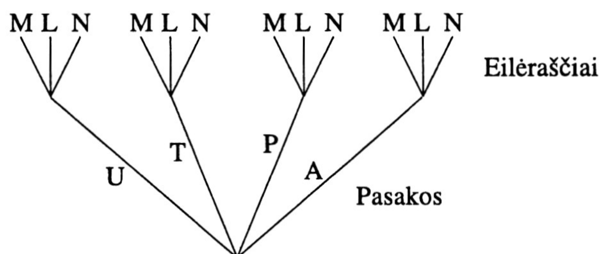


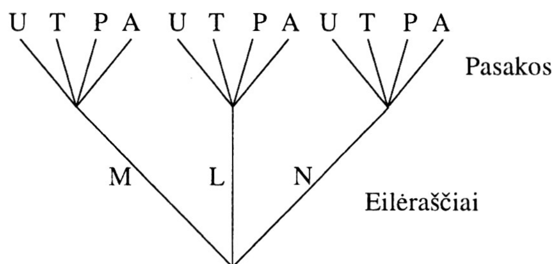



## 3 skyrelis.

**30.** Galima nupiešti du galimybių medžius. Naudokimės sutrumpinimais: U – „Užburta karalystė", T – „Tūkstantis ir viena naktis", P – „Lietuviškos pasakos", A – „Auksinis raktelis", M – Maironio eilėraščių rinkinys, L – Maldonio eilėraščių rinkinys, N – S. Nėries eilėraščių rinkinys.

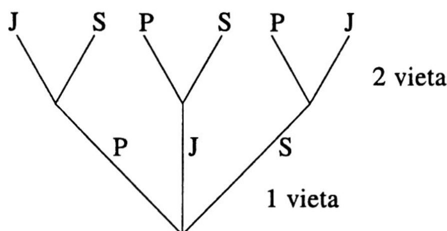





Galimybių aibės: {UM, UL, UN, TM, TL, TN, PM, PL, PN, AM, AL, AN} arba (kas iš esmės yra tas pats!) {MU, MT, MP, MA, LU, LT, LP, LA, NU, NT, NP, NA}.

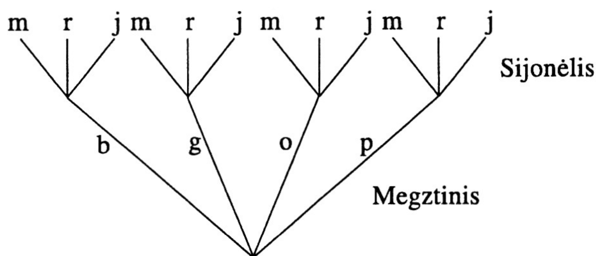
Galimybių skaičius lygus medžio viršūnių skaičiui ir lygus aibės elementų (raidžių dvejetų) skaičiui: $12 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$.

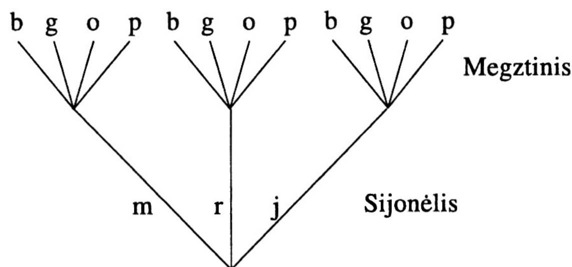
**31.**




Galimybių aibė {PJ, PS, JP, JS, SP, SJ}. Skirtingų galimybių skaičius lygus medžio viršūnių skaičiui ir lygus galimybių aibės elementų (raidžių dvejetų) skaičiui: $6 = 3 \cdot 2$.

**32.**

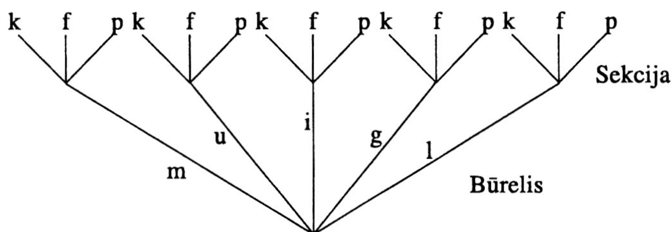


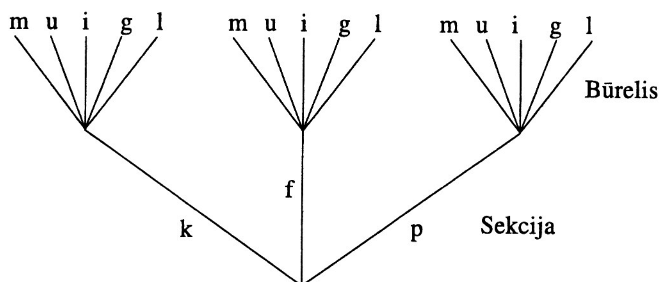

Galimybių aibės: {bm, br, bj, gm, gr, gj, om, or, oj, pm, pr, pj}, {mb, mg, mo, mp, rb, rg, ro, rp, jb, jg, jo, jp}. Onutė gali skirtingai rengtis $12 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$ dienų iš eilės.

**33.** $5 \cdot 3$.

**34.**

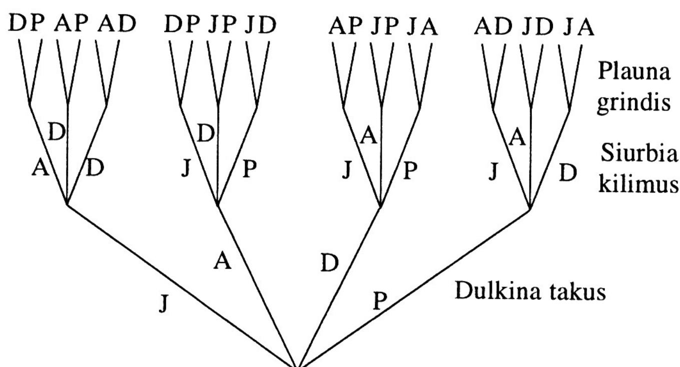


{mk, mf, mp, uk, uf, up, ik, if, ip, gk, gf, gp, lk, lf, lp}.




{km, ku, ki, kg, kl, fm, fu, fi, fg, fl, pm, pu, pi, pg, pl}.
Pasirinkimo galimybių skaičius $15 = 5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$.

**36.**




Vis kitaip paskirstyti darbus galima $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ šeštadienius.

**37.**

PS BS BP PS OS OP PS OS OB BP OP OB Į lietuvių kalbos olimpiadą

P P B B

B S O S O S O P Į istorijos olimpiadą

B P

O S Į matematikos olimpiadą

Galimybių skaičius lygus $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

**38.**

1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 „Mikės Pūkuotuko“ serija

3 5 6 3 5 6 3 5 6 3 5 6 3 5 6 „Na, palauk!“ serija

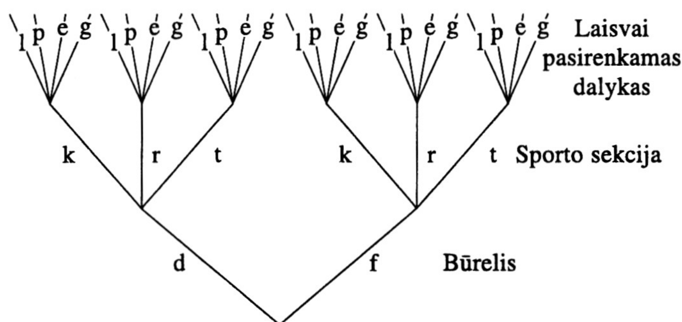
3

2 4

1 5 „Vaiduoklių gaudytojų“ serija

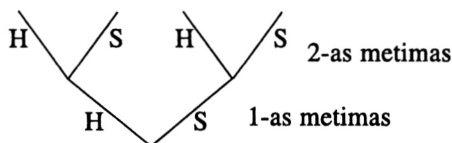
Galima nupiešti 6 skirtingus medžius. Galimybių skaičius yra $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ – medžio viršūnių skaičius.

**39.** Galima nupiešti 6 skirtingus galimybių medžius. Vienas iš jų yra šitoks.



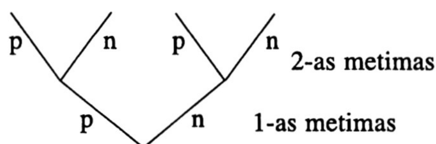

Valiaus pasirinkimo galimybių skaičius yra $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 3 \cdot 4 \cdot 2$.

**40.** 2. H – moneta atvirto herbu, S – moneta atvirto skaičiumi.



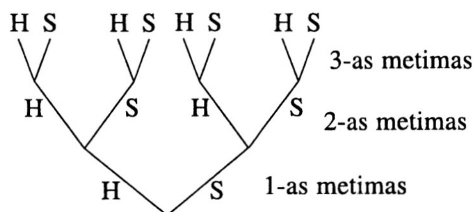

Galimybių aibė {HH, HS, SH, SS}.

**41.** p – pataikė, n – nepataikė.



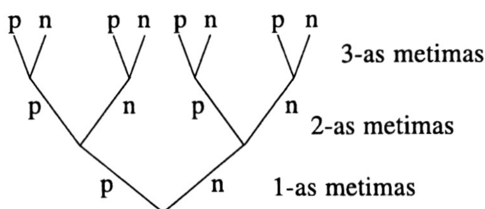

Galimybių aibė {pp, pn, np, nn}. Galimybių skaičius lygus $4 = 2 \cdot 2$.

**42.**



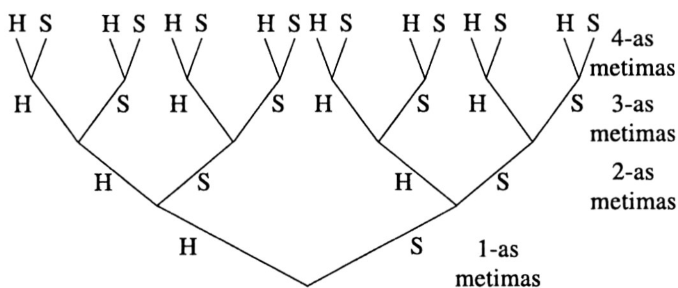

Galimybių aibė {HHH, HHS, HSH, HSS, SHH, SHS, SSH, SSS}. Galimybių skaičius $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$.

**43.**




{ppp, ppn, pnp, pnn, npp, npn, nnp, nnn}. Galimybių skaičius lygus $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$.

**44.**



Galimybių aibė {HHHH, HHHS, HHSH, HHSS, HSHH, HSHS, HSSH, HSSS, SHHH, SHHS, SHSH, SHSS, SSHH, SSHS, SSSH, SSSS}. Galimybių skaičius lygus $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

**4 skyrelis.**

**48.** $5 \cdot 4$. **49.** 1. $3 \cdot 5$. 2. $3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3$. 3. $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2$. **50.** $3 \cdot 3$. **51.** $3 \cdot 3 \cdot 3$. **52.** $3 \cdot 2$. **53.** $3 \cdot 3$. **54.** $4 \cdot 4$.

**55*.** 1. Triženklis skaičius yra rinkinys $abc$. $a$ galima pasirinkti 9 skirtingais būdais, nes iš viso yra 10 skaitmenų, bet skaičiaus pirmasis skaitmuo negali būti lygus 0. (Ir) $b$ galima pasirinkti 9 skirtingais būdais, nes vienas skaitmuo jau paimtas. (Ir) $c$ galima pasirinkti 8 skirtingais būdais, nes du skaitmenys jau paimti. Pagal kombinatorinę daugybos taisyklę gauname, kad triženklių skaičių, neturinčių vienodų skaitmenų, yra $9 \cdot 9 \cdot 8$. 2. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$. 3. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

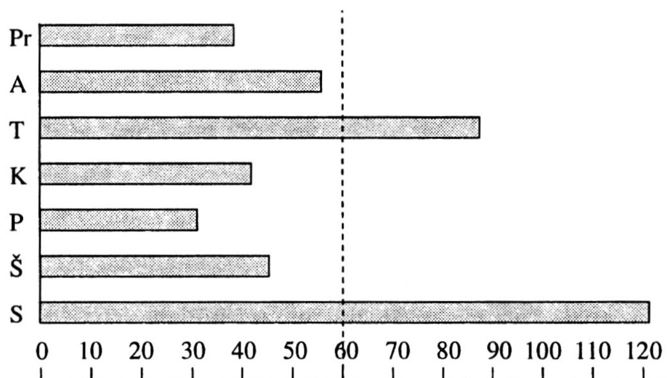
**56*.** Pagal kombinatorinę daugybos taisyklę gauname $5 \cdot n$ ($n$ – dviejų skirtingų meškiukų iš 4 rūšių pasirinkimo galimybių skaičius). Jį randame išrašydami visas galimybes. Pažymėkime $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$ 1-os, 2-os, 3-os, 4-os rūšies meškiukus. Birutė gali rinktis taip: $m_1m_2$, $m_1m_3$, $m_1m_4$, $m_2m_3$, $m_2m_4$, $m_3m_4$. Taigi $n = 6$. Todėl $5n = 5 \cdot 6 = 30$.

**57.** $5 \cdot 6$.

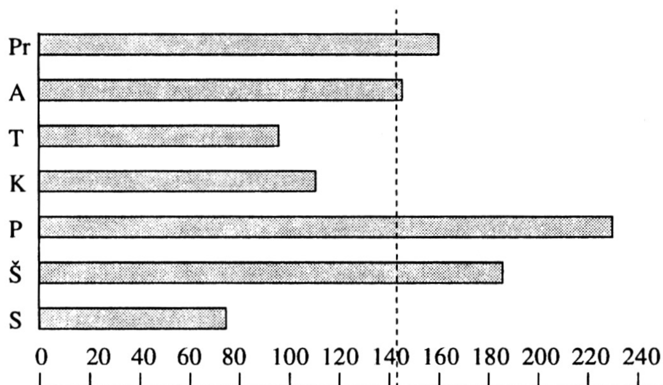
**5 skyrelis.**

**60.** 81 kg. **61.** Vyto 334 cm, Simo 336 cm, Algio 392 cm, Beno 318 cm.

**62.** 60 km (vienetų tikslumu).

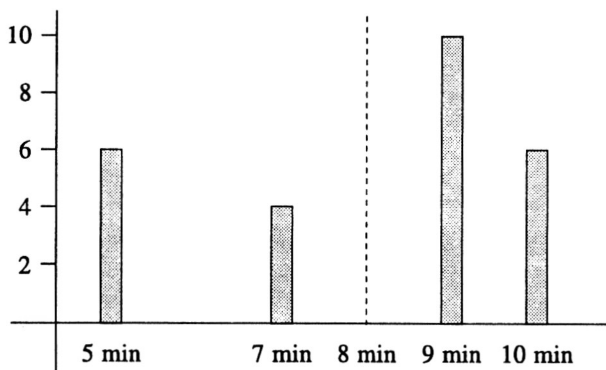



**63.** 143.



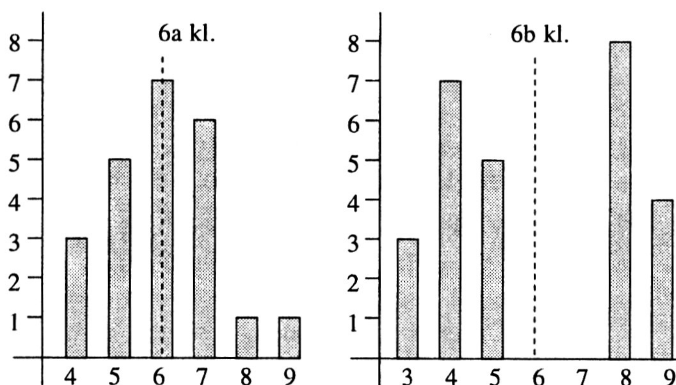

**64.** 358.

**66*.** 8.




**67*.**

6a kl. – 6 min, 6b kl. – 6 min. Vadinasi, abiejų klasių mokiniams užduočiai atlikti prireikė vidutiniškai tiek pat laiko.



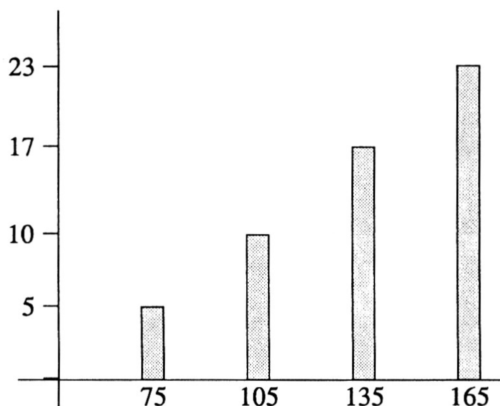

**69*.** Apskaičiuojame, kiek vidutiniškai automobilių pravažiuoja per sankryžą per 1 minutę.

Stebėta iš viso $22 + 28 + 18 + 12 + 20 = 100$ (min).

Pravažiavo $93 + 171 + 75 + 100 + 161 = 600$ (automobilių). Vidutiniškai per 1 minutę pravažiuja $600 : 100 = 6$ (automobiliai). Todėl per 30 min vidutiniškai pravažiuos 30 kartų daugiau automobilių: $6 \cdot 30 = 180$ (automobilių).

**70*.** Apskaičiuojame, kiek metrų pagriovių nušienaujama vidutiniškai per 1 valandą: $(60+75+97+43) : (2+3+4+2) = 25$ (m). Vidutiniškai per dieną $25 \cdot 8 = 200$ (m). Prireiks $3650 : 200 \approx 18$ dienų.

**71*.**




Mokiniai vidutiniškai praleidžia prie televizoriaus 137 min. Suapvalinę 15 minučių tikslumu, gauname 2 val. 15 min.

**72*.** 1. Perkant po 1 porciją visų rūšių ledų, reikia sumokėti 6 Lt 75 ct, o Algis tiek pinigų neturi. 2. 83 ct. 3. 80 ct, 67 ct. 4. 1 Lt 01 ct. 5. Visas tris dienas grietininius arba dvi dienas grietininius, o vieną dieną šokoladinius. 6. Negali. 7. Taip.

**6 skyrelis.**

**75.** $3 \cdot 2 \cdot 1$. **76.** $k+l+m = k+m+l = l+k+m = l+m+k = m+k+l = m+l+k$; $(k+l)+m = k+(l+m) = (k+l+m) = \ldots = (m+k)+l = m+(k+l) = (m+k+l)$; 6, 18. **77.** Žr. 76 uždavinį. **78.** 6. **79.** $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

**80.** 1. $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, 2. $3 \cdot 2 \cdot 1$, 3. 2. **81.** 8753, 3578; $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$; $3 \cdot 2$ : 3758, 3785, 5738, 5783, 8735, 8753; $3 \cdot 2$ : 8753, 8573, 7853, 7583, 5873, 5783. **82.** $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. **83.** $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. **84.** 1. $(a+b)+c+d = (a+b+c)+d = (a+b+c+d) = a+(b+c)+d = a+(b+c+d) = a+b+(c+d)$. 2*. $24 \cdot 6$. **85.** Žr. 84 uždavinį. **86.** $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. **87.** Žr. 86 uždavinį. **88*.** Kai stalas apvalus ir kėdės nesunumeruotos, tai susėdus berniukams ant kėdžių ir judant jiems visiems į vieną pusę, susėdimas nepasikeis. Todėl skirtingų susėdimų už apvalaus stalo bus 5 kartus mažiau negu susėdimų ant 5 sunumeruotų kėdžių, t.y. $(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) : 5 = 24$. **89.** $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. **90.** $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. **91.** Taip, nes 10 skaitmenų galima išdėlioti į eilę $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$ skirtingų būdų.

**7 skyrelis.**

**95.** $4 \cdot 3 \cdot 2$. **96.** $7 \cdot 6 \cdot 5$. **97.** $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. **98.** 1. $10 \cdot 9 \cdot 8$; 2. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$; 3. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. **99.** $5 \cdot 4 \cdot 3$. **100.** $5 \cdot 4 \cdot 3$. **101.** $7 \cdot 6 \cdot 5$. **102.** $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$. **103.** $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

**8 skyrelis.**

**106.** 1. a) A, B, C, D, E. b) AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE. c) ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE. d) ABCD, ABCE, ABDE, ACDE, BCDE. 2. 5, 10, 10, 5. Vienodai nuo galų nutolę skaičiai sutampa. **107.** Yra 15 raidžių dvejetų, 15 raidžių ketvertų. **108.** $(5 \cdot 4 \cdot 3) : (3 \cdot 2)$. **109.** $(6 \cdot 5) : 2$. **110.** $(6 \cdot 5 \cdot 4) : (3 \cdot 2)$. **111.** $(5 \cdot 4 \cdot 3) : (3 \cdot 2)$. **112.** $(7 \cdot 6) : 2$. **113.** 6, 15, 20, 15, 6. Didžiausias – vidurinis. Iš pradžių skaičiai didėja, po to mažėja, o vienodai nuo galų nutolę skaičiai sutampa. **114.** $(6 \cdot 5) : 2$.

**9 skyrelis.**

**117.** Tarę, kad tarp 110 tušinukų blogi sudaro maždaug tą pačią dalį, kaip ir tarp 20, gauname $\frac{3}{20} = \frac{x}{110}$ ir randame, kad $x = \frac{330}{20} = 16{,}5$. Todėl iš 110 tušinukų bus maždaug

110 – 17 = 93 geri. Už 93 gerus tušinukus perkant po vieną tektų sumokėti 50 ct · 93 = 46 Lt 50 ct < 50 Lt. Taigi naudingiau pirkti tušinukus po vieną. **118.** 33. **119.** a) 20; b) 28; c) 32. **120.** 35. **121.** 3600 (suapvalinus).

**122.** „Atletas“ metė į vartus 44 kartus, „Šviesa“ – 45 kartus. „Atleto“ įvykio „mesta į vartus, bet įvarčio nebuvo“ santykinis dažnis $\frac{30}{44}$. „Šviesos“ įvykio „mesta į vartus, bet įvarčio nebuvo“ santykinis dažnis $\frac{28}{45}$.

**123.** Dažniai ir santykiniai dažniai įrašyti langeliuose atitinkamuose stulpeliuose. Stulpelyje, pažymėtame raide m, nurodyti taškų vidurkiai. Stulpelyje l nurodyti įvykio „atvirto lyginis taškų skaičius“ dažniai, stulpelyje, pažymėtame $\geqslant 3$, nurodyti įvykio „atvirto ne mažiau kaip 3 taškai“ dažniai.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | n | m | l | $\geqslant 3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mikas | 2 | 6 | 5 | 7 | 9 | 6 | 35 | $3\frac{33}{35}$ | 19 | 27 |
| | $\frac{2}{35}$ | $\frac{6}{35}$ | $\frac{5}{35}$ | $\frac{7}{35}$ | $\frac{9}{35}$ | $\frac{6}{35}$ | | | $\frac{19}{35}$ | $\frac{27}{35}$ |
| Vytas | 10 | 9 | 7 | 8 | 10 | 8 | 52 | $3\frac{23}{52}$ | 25 | 33 |
| | $\frac{10}{52}$ | $\frac{9}{52}$ | $\frac{7}{52}$ | $\frac{8}{52}$ | $\frac{10}{52}$ | $\frac{8}{52}$ | | $\frac{25}{65}$ | $\frac{33}{65}$ | |
| Simas | 11 | 10 | 13 | 9 | 10 | 12 | 65 | $3\frac{33}{65}$ | 31 | 44 |
| | $\frac{11}{52}$ | $\frac{10}{52}$ | $\frac{13}{52}$ | $\frac{9}{52}$ | $\frac{10}{52}$ | $\frac{12}{52}$ | | $\frac{31}{65}$ | $\frac{44}{65}$ | |

Atsakyti į klausimą, kurio kauliukas tiksliausias, galėtume palyginę santykių dažnių skirtumus. Miko didžiausias santykinių dažnių skirtumas yra $\frac{9}{35} - \frac{2}{35} = \frac{7}{35}$, Vyto – $\frac{10}{52} - \frac{7}{52} = \frac{3}{52}$, Simo – $\frac{13}{65} - \frac{9}{65} = \frac{4}{65}$. Kadangi $\frac{7}{35} > \frac{4}{65} > \frac{3}{52}$, tai galima būtų teigti, kad tiksliausias yra Vyto kauliukas, prasčiausias – Miko. Beje, Vyto ir Simo kauliukai mažai kuo skiriasi, nes jų dažnių didžiausių skirtumų skirtumas yra (gana) mažas:

$$\frac{4}{65} - \frac{3}{52} = \frac{208-195}{65 \cdot 52} = \frac{13}{65 \cdot 52} = \frac{1}{52 \cdot 5} = \frac{1}{260}.$$

**124.**

| | Sunkvežimis | Autobusas | Lengvasis automobilis | Iš viso |
|---|---|---|---|---|
| Dalius | 18<br>$\frac{18}{55}$ | 13<br>$\frac{13}{55}$ | 24<br>$\frac{24}{55}$ | 55 |
| Vytas | 19<br>$\frac{19}{59}$ | 13<br>$\frac{13}{59}$ | 27<br>$\frac{27}{59}$ | 59 |

Pro Daliaus namą santykinai daugiau pravažiuoja sunkvežimių, autobusų, nes atitinkamų įvykių santykiniai dažniai didesni: $\frac{18}{55} > \frac{19}{59}$, $\frac{13}{55} > \frac{13}{59}$. Lengvųjų automobilių santykinai daugiau pravažiuoja pro Vyto namą, nes $\frac{27}{59} > \frac{24}{55}$.

**125.** Santykiniai dažniai surašyti lentelėje:

| Įvykis | P | B | J |
|---|---|---|---|
| Santykinis dažnis | $\frac{19}{78}$ | $\frac{22}{78}$ | $\frac{37}{78}$ |

**126.** Santykiniai dažniai surašyti lentelėje:

| Įvykis | Knyga | Saldainiai | Tušinukas | Ekskursija | Tuščias bilietas |
|---|---|---|---|---|---|
| Santykinis dažnis | $\frac{14}{146}$ | $\frac{32}{146}$ | $\frac{34}{146}$ | $\frac{3}{146}$ | $\frac{63}{146}$ |

**10 skyrelis.**

**130.** 1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. 2. a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, b) $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$, c) $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$, d) $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, e) $E = \{5, 10, 15\}$, f) $F = \{3, 6, 9, 12, 15\}$. 3. a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 15\} = D \cup F$, $m(D \cup F) = m(D) + m(F) - m(D \cap F) = 5 + 5 - 1 = 9$. b) $\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\} = C \cup E = C$,

$m(C \cup E) = m(C) + m(E) - M(C \cap E) = 11 + 3 - 3 = 11 = m(C)$. c) $\{1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15\} = B \cup F$, $m(B \cup F) = m(B) + m(F) - m(B \cap F) = 8 + 5 - 3 = 10$. d) $\{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 15\} = B \cup E$, $m(B \cup E) = m(B) + m(E) - m(B \cap E) = 8 + 3 - 2 = 9$. e) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\} = A \cup B$, $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B) = 7 + 8 - 0 = 15$. f) $\{3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\} = F \cup C$, $m(F \cup C) = m(F) + m(C) - m(F \cap C) = 5 + 11 - 4 = 12$.

**131.** 2. a) $A$ – „ištrauktas rutuliukas su lyginiu numeriu“; b) $B$ – „ištraukto rutuliuko numeris ne didesnis už 10“; c) $C$ – „ištraukto rutuliuko numeris dalijasi iš 3“; d) $D$ – „ištraukto rutuliuko numeris dalijasi iš 4“; e) $H$ – „ištraukto rutuliuko numeris didesnis už 14“. (Galima tuos įvykius ir kitaip pasakyti. Kaip? Pasakykite kitaip įvykius $B, H$). 3. a) $B \cup U$ – „ištraukto rutuliuko numeris yra mažesnis už 11 arba dalijasi iš 4“; b) $A \cup H$ – „ištraukto rutuliuko numeris yra lyginis arba didesnis už 14“; c) $C \cup D$ – „ištraukto rutuliuko numeris dalijasi iš 3 arba iš 4“; d) $A \cup D$ – „ištraukto rutuliuko numeris yra lyginis skaičius arba dalijasi iš 4“. (Kadangi kiekvienas dalus iš 4 skaičius yra lyginis, tai įvykis $A \cup D$ sutampa su įvykiu $A$ – „ištraukto rutuliuko numeris yra lyginis skaičius“); e) $B \cup A$ – „ištraukto rutuliuko numeris mažesnis už 11 arba yra lyginis skaičius“.

**132.** $6^2 + 4^2 - 13$ (cm$^2$). **133.** $49 + 25 - 64$ (cm$^2$). **134*.** $10 \cdot 5 + 49 - 2 \cdot 10$ (m$^2$) (*Nurodymas.* Trikampio pagrindas lygus 14 m.) **135.** $(\frac{1}{2})(12 \cdot 7) - 10$ (m$^2$). **136.** $(23 + 34) - 48$. **137.** $133 - 74 + 31$. **138.** $(15 + 13) - 23$. **139.** $(16 + 18) - 7$. **140.** $(63 - 45) + 15$. **141.** $(13+18)-7$. **142.** $(20+15)-8$. **143.** $(13+19)-23$. **144.** $(40 - 30) + 25$.

**145*.** 1. Pažymėkime raide $r$ raudonų pieštukų skaičių, $m$ – mėlynų pieštukų skaičių, $d$ – dvispalvių pieštukų skaičių. Tada iš vieno dėžutės galo matysime $r$ raudonų galiukų, iš kito $r + d$ raudonų galiukų. Vadinasi, paėmę mažesnį iš

šių dviejų skaičių, nustatysime $r$, o radę tų dviejų skaičių skirtumą, nustatysime $d$. Po to $m$ galėsime rasti iš lygybės $r + m + d = 50$. (Žinoma, galima lyginti mėlynųjų galiukų skaičius ir imti mažesnį.) Pavyzdžiui, jei iš vieno galo matome 25 raudonus galiukus, o iš kito 36 raudonus galiukus, tai dėžutėje yra 25 raudoni, 11 dvispalvių pieštukų ir $50 - 25 - 11 = 144$ mėlynų pieštukų.

2. Uždavinio sąlygoje turima galvoje, kad negalima nustatyti abiejų to paties pieštuko galiukų spalvų (nors atsargiai sukiojant dėžutę, tai padaryti būna įmanoma). Uždavinį griežčiau suformuluoti galima taip: ar žinant raudonų galiukų, matomų iš dėžutės galų, skaičius įmanoma nustatyti, kiek kokių pieštukų dėžutėje? Atsakymas – neįmanoma, ir štai kodėl. Pakeiskime dėžutėje vieną raudoną ir vieną mėlyną pieštukus dviem dvispalviais, tik sudėtais priešingai. Tada matomų galiukų skaičius nepasikeis, o dėžutės sudėtis bus kita. (Beje, įmanoma nustatyti, kurių – raudonų ar mėlynų – pieštukų dėžutėje daugiau ir keliais daugiau. Kaip – sugalvokite patys.)

**11 skyrelis.**

**148.** $m + n$, $m = 6 + 4$, $n = 6 \cdot 4$. **149.** $m + n + k$, $m = 6 \cdot 5$, $n = 6 \cdot 7$, $k = 5 \cdot 7$. **150.** $m + n + k$, $m = 5 \cdot 6$, $n = 5 \cdot 8$, $k = 6 \cdot 8$. **151.** $7 \cdot 5 + 7 \cdot 4 + 5 \cdot 4$. **152.** Skaičius yra mažesnis už 100, kai jis yra vienaženklis arba dviženklis. $5 + 5 \cdot 5$. **153.** $5 + 5 \cdot 4$. **154.** Skaičius yra mažesnis už 1000, kai jis yra arba vienaženklis, arba dviženklis, arba triženklis. $4+4\cdot4+4\cdot4\cdot4$. **155.** $4+4\cdot3+4\cdot3\cdot2+4\cdot3\cdot2\cdot1$. **156.** $9+9\cdot9+9\cdot9\cdot8$. **157*.** $5+5\cdot4+5\cdot4\cdot3+5\cdot4\cdot3\cdot2+5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$.

**158*.** Simas gali skolintis *arba* vieną, *arba* dvi, *arba* tris kasetes. Pagal sudėties taisyklę gauname $k + l + m$. $k = 6$, nes yra 6 skirtingos kasetės, $l = \frac{6\cdot5}{2} = 15$ – dviejų skirtingų kasečių iš 6 skirtingų pasirinkimų skaičius, $m = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2} = 30$ – trijų daiktų iš 6 daiktų pasirinkimų skaičius. Iš viso $6 + 15 + 30 = 51$.

**159*.** $7 + \frac{7 \cdot 6}{2} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1}$.

**160*.** $6 + \frac{6 \cdot 5}{2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$.

**161*.** $k + l + m + n$, $k = \frac{5 \cdot 4}{2}$, $l = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$, $m = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$, $n = \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 5$.

Pranas Survila

KOMBINATORIKOS IR STATISTIKOS
PRADŽIAMOKSLIS

Redaktorius Juozas Mačys
Viršelio dailininkas Raimondas Galinis

SL 1670. 1996 06 25. 5,5 sp. l. Tiražas 3 000 egz.
Leidykla „Pašekšta“, a/d 1709, 2010 Vilnius.
Rinko ir maketavo Bendroji Lietuvos–Olandijos įmonė VTEX.
Spausdino AB „Standartų spaustuvė“, Dariaus ir Girėno 39,
2038 Vilnius.

Kaina sutartinė